

ラマヌジャンのデルタ

梅崎直也@unaoya

2021年8月7日

ラマヌジャンのデルタと呼ばれる複素上半平面で定義された複素関数があります。これは保型形式と呼ばれる特別な対称性を持った関数です。この関数は、 z を複素上半平面の点、 $q = \exp(2\pi iz)$ としたとき、

$$\Delta(z) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$$

と表されます。この関数を q について展開した

$$\Delta(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n$$

の q^n の係数 $\tau(n)$ はラマヌジャンの τ 関数と呼ばれます。小さい n について、 $\tau(1) = 1, \tau(2) = -24, \tau(3) = 252, \tau(4) = -1472, \tau(5) = 4830, \tau(6) = -6048$ などとなります。この τ 関数は数論的な特徴たくさん持ちますが、今回の講演では特に以下の三つの事実についてその証明も含めて簡単にお話しします。

1. p を素数としたとき

$$\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \pmod{691}$$

となり、一般の正整数 n に対しては $\tau(n)$ は n の約数の 11 乗の和と $\pmod{691}$ で合同。

2. 正整数 n, m が互いに素なとき

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$$

となり、 p を素数としたとき

$$\tau(p^{k+1}) = \tau(p)\tau(p^k) - p^{11}\tau(p^{k-1})$$

となる。

3. p を素数としたとき

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$$

となる。