四元数と回転

宇佐見 公輔

第三回 すうがく徒のつどい@オンライン

四元数（しげんすう / quaternion）とは、$x_0+x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}$（$x_i \in \mathbb{R}$）とあらわされる数です。ここで、i、j、k は実数とは異なる数であり、次の関係式を満たすものです。これらは虚数単位と呼ばれます。

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$$

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$$

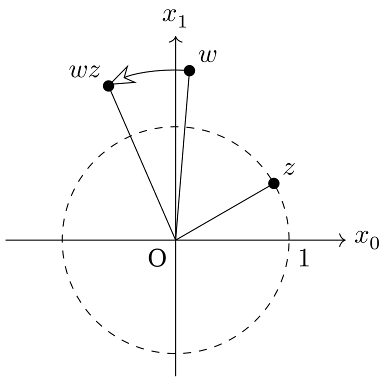
複素数が $x_0 + x_1\mathrm{i}$（$x_i \in \mathbb{R}$）とあらわされる数でしたから、四元数は複素数の拡張と考えられます。複素数では虚数単位が 1 つであったのに対して、四元数では虚数単位が 3 つあります。

四元数はハミルトンが 1843 年に考え出しました。ハミルトンが四元数のアイデアをひらめいたとき、嬉しさのあまり、そのとき渡っていた橋（アイルランドのダブリンにあるブルーム橋）に以下の式を刻んだといいます。この関係式は、先ほど挙げた虚数単位の関係式と同値です。

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$$

ところで、ハミルトンはなぜ複素数の拡張を考えたのでしょうか。

ここで、2 次元平面の回転を考えます。平面上の点の回転は、実は複素数の積で表現することができます。複素平面上の点 w を原点を中心に角 θ だけ回転する操作は、複素数 w に大きさ 1 偏角 θ の複素数 z をかける操作 $w \mapsto wz$ として表現できます。



2 次元空間の回転が複素数で表現できるなら、同じように 3 次元空間の回転を何らかの数で表現できないだろうか、というのが、ハミルトンが複素数の拡張を考えた動機だったようです。その結果、四元数にたどり着きました。

3 次元空間上の点の回転は、実は四元数を使って次のように表現できます。四元数の実部を除いた純虚四元数 $x = x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k}$ を考えます。それを 3 次元空間の点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ と対応させることにします。3 次元空間の点 x を回転する操作は、純虚四元数 x に対して大きさ 1 の四元数 q を使った次の操作

$$x \mapsto qxq^{-1}$$

として表現できます。

今回の講演では、この四元数と 3 次元空間の回転について説明します。前提知識としては、複素数、三角関数（特に加法定理）、行列（2〜3 次）の計算ができれば十分と想定しています。