ヒルベルトの第10問題の否定的解決について

N.Y

ヒルベルトの第10問題とは,整数係数多項式$f(x_1, \cdots, x_n)$を入力としてfが整数根をもつかどうかを判定するアルゴリズムを構成せよという問題であり、1900年の国際数学者会議で提示された問題である.1970年Matiyasevichによってそのようなアルゴリズムは存在しないという事が証明されヒルベルトの第10問題は否定的に解決された.
今回の発表ではこの事実がどのように導かれるかについて,なるべく予備知識を仮定しないようにしつつ解説する.

ヒルベルトの第10問題を否定的に解決する証明は大きく分けて以下の2つの部分にわけられる.
①自然数全体の集合ℕの部分集合Hで,再帰的可算集合であるが再帰的集合でないものが存在することを示す部分
②再帰的可算集合はすべてDiophantine集合であることを示す部分

①再帰的集合,再帰的可算集合というのは自然数の集合Aが"計算可能"であるということを定式化した2種類の概念であり,再帰的というのは入力された自然数に対してそれがAに属しているかを判定する計算可能な関数が存在するということ,再帰的可算というのは集合Aがある計算可能な関数の像であるということである.ここで計算可能と言っているのは"アルゴリズムがある"とか"コンピュータでプログラムが書ける"とかそういう認識で今回は構わない.上記の二つの定義にはギャップがあり、再帰的集合は再帰的可算集合でもあるが、再帰的可算集合は必ずしも再帰的集合であるとは限らない.

②集合$S \subset \mathbb{N}^n$がDiophantine集合であるとは、ある多項式$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$が存在して $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n | \exists \mathbf{y} \in \mathbb{N}^m\, P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$ とあらわされることである。
もし、ディオファントス方程式の可解性を判定するアルゴリズムが存在してしまうと、任意の再帰的可算集合が再帰的集合になってしまい、矛盾となることで、ヒルベルトの第10問題が否定的に解決される。

②の議論がテクニカルで長大である.今回の発表では②の部分の解説をメインで行う予定である。

参考

[Davis 1973]M.Davis, "Hilbert's tenth problem is unsolvable." Amer. Math. Monthly 80 (1973), 233-269
[吉永 2016]吉永 正彦 "周期と実数の0-認識問題 Kontsebich-Zagierの予想" 数学書房 (2016)