

CW 複体の微分構造

秋桜

1980 年頃に幾つかの同値でない可微分構造の概念が様々な研究者により独立に与えられた。中でも K. T. Chen [Che73, Che75, Che77, Che86] による differentiable space(以下, Chen 空間) は例えば T. Kohno により iterated integral へ応用される一方で, J. M. Souriau [Sou80] による diffeological space(以下, 微分空間) は P. Iglesias-Zemmour [IZ13] をはじめとする研究者によって理論的な整備が進み, Zemmour [ZI85] により滑らかな多様体の圏には類似物の存在しない微分空間の特徴的な例となる irrational torus が発見されるなど精力的に研究が進められている。

微分空間は滑らかな多様体の一般化である。滑らかな多様体のなす圏は極限と余極限に関して閉じておらず, Cartesian 閉圏でない。しかし, 微分空間のなす圏は極限と余極限に閉じており, Cartesian 閉圏である。そのため, ファイバー積や接着空間などの構成で微分構造が失われず, 微分空間との積をとる関手が左随伴関手となる。

微分空間は滑らかな多様体だけでなく単なる位相空間など様々な種類の空間を含むため, 「良い」微分空間とは何かということが問題となる。そこで, 滑らかな多様体や I. Satake [Sat56] による V-manifold や stratified space [Mat12] がもつ性質として reflexivity に注目した。

N. Iwase と N. Izumida [II15] や H. Kihara [Kih17] は smooth CW complex を定義した。しかし, 球面などの位相的な CW complex かつ滑らかな多様体である空間が smooth CW complex にならないという問題がある。また, smooth CW complex は滑らかな 1 の分割をもつなど滑らかな多様体と似た性質をもつが, 一般に reflexive であることは証明されていない。

本講演は, 微分空間の定義や例を述べるところから始める。そして, smooth CW complex のアイデアを参考に新しい CW 複体の微分構造を導入し, その具体例と reflexivity について話す。

前提知識は基本的な位相空間論と圏論と多様体論の知識を仮定するが, できるだけ気持ちを述べることで広い層にたのしんでいただけるようにするつもりである。微分トポロジーの知識があるとより楽しめる。

参考文献

- [Che73] Kuo-tsai Chen. Iterated integrals of differential forms and loop space homology. *Ann. of Math. (2)*, 97:217–246, 1973.
- [Che75] Kuo Tsai Chen. Iterated integrals, fundamental groups and covering spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 206:83–98, 1975.

- [Che77] Kuo Tsai Chen. Iterated path integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(5):831–879, 1977.
- [Che86] Kuo Tsai Chen. On differentiable spaces. In *Categories in continuum physics (Buffalo, N.Y., 1982)*, volume 1174 of *Lecture Notes in Math.*, pages 38–42. Springer, Berlin, 1986.
- [DI85] Paul Donato and Patrick Iglésias. Exemples de groupes difféologiques: flots irrationnels sur le tore. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(4):127–130, 1985.
- [II15] Norio Iwase and Nobuyuki Izumida. Mayer-vietoris sequence for differentiable/diffeological spaces. *arXiv:1511.06948*, 11 2015.
- [IZ13] Patrick Iglesias-Zemmour. *Diffeology*, volume 185 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [Kih17] Hiroshi Kihara. Quillen equivalences between the model categories of smooth spaces, simplicial sets, and arc-generated spaces. *arXiv:1702.04070*, 02 2017.
- [Mat12] John Mather. Notes on topological stability. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 49(4):475–506, 2012.
- [Sat56] Ichiro Satake. On a generalization of the notion of manifold. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 42:359–363, 1956.
- [Sou80] Jean-Marie Souriau. Groupes différentiels. In *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca, 1979)*, volume 836 of *Lecture Notes in Math.*, pages 91–128. Springer, Berlin-New York, 1980.