

Zermelo と von Neumann の無限公理の同値性

上島 晟宏

よく知られている数学の公理化の一つに、ZFC 公理系があります。ZFC の各公理の主張は、[Wikipedia](#)などを参照してください。現在の ZFC 公理系は、1908 年に Zermelo によって提唱され、Fraenkel と von Neumann によって改良されたものです [1, p8]。von Neumann のした改良のひとつに、無限公理があります。無限公理は自然数を定式化する公理で、Zermelo は次のようなものを提案していました。

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\{y\} \in x)).$$

この公理によって存在が保証された x は（より正確には、そのような x のうちで包含関係に関して最小のものは）

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

というような感じになっているので、 \emptyset を 0, $\{\emptyset\}$ を 1, $\{\{\emptyset\}\}$ を 2, ... と名前をつけていけば、自然数全体 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ を定式化できます。これに対して、von Neumann は次のような改良を提案しました。

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x)).$$

この公理によって作られる自然数は、

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

となっています。von Neumann のこの改良によって、自然数だけでなく、それを拡張した概念である順序数もより扱いやすいものになりました。

本発表では、Zermelo と von Neumann の無限公理が ZF から無限公理を除いた公理系において同値であることの証明と、von Neumann の無限公理がなぜ「改良」であるのかの説明をしようと思います。

参考文献

- [1] 著：Kenneth Kunen, 訳：藤田博司, 『キューネン数学基礎論講義』, 日本評論社, 2016