Onsager 代数とその周辺

宇佐見 公輔

第 4 回 すうがく徒のつどい

Ising 模型と Onsager 代数

Ising 模型は統計力学で扱われる数理模型のひとつです。強磁性体などの模型として用いられます。1 次元と 2 次元の Ising 模型は、数学的に厳密解を求めることができる可解格子模型です。2 次元 Ising 模型は、統計力学における相転移の研究において重要な役割を果たしています。

2 次元 Ising 模型の厳密解は、1944 年に Onsager によってはじめて導かれました。その際に、現在では Onsager 代数と呼ばれる代数構造が導入されました。

なお 2 次元 Ising 模型の厳密解を導出する方法については、その後に別の手法がいくつか発見されています。Onsager 代数の手法は複雑であるため、統計力学においては。より簡単なそれらの手法が紹介されることが多いです。

Onsager 代数とその同型

Onsager 代数は、$\mathbb{C}$ 上の無限次元 Lie 代数です。

$\{A_k, G_m\}$（$k \in \mathbb{Z}$、$m \in \mathbb{Z}_{>0}$）を基底とし、ブラケット積を以下で定義した Lie 代数を Onsager 代数と呼びます（ここで便宜上 $G_{-m} := -G_m$、$G_0 := 0$ とします）。

$$[A_k, A_l] = 4G_{k-l}$$
$$[G_m, A_k] = 2A_{k+m} - 2A_{k-m}$$
$$[G_m, G_n] = 0$$

このように定義した Onsager 代数は、生成元 $\{A_0, A_1\}$ と以下の関係式（Dolan-Grady 関係式）で生成される Lie 代数と同型です。

$$[A_0, [A_0, [A_0, A_1]]] = 16[A_0, A_1]$$
$$[A_1, [A_1, [A_1, A_0]]] = 16[A_1, A_0]$$

また Onsager 代数は、$\mathbb{C}[t,t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の部分 Lie 代数

$$\{x \in \mathbb{C}[t,t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \mid \omega(x) = x\}$$

（ここで ω は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ のある自己同型写像）と同型です。これは Onsager 代数が $A_1^{(1)}$ 型のアフィン Lie 代数の部分 Lie 代数になっていることを意味します。このことから、さらに $A_1^{(1)}$ 型以外への一般化も考えられています。

今回の話では、Onsager 代数とその同型について紹介します。

前提知識など

線型代数や Lie 代数の基本的な知識があると望ましいです。ただ、それほど知識がなくても伝わるように話をしたいと考えています。