CW 複体の微分構造

秋桜

目次

目次

Diffeological space

定義 n を自然数とする.

- $\mathbf{R}^n$ の開集合を n-domain あるいは単に domain と呼ぶ.
- n-domain から空でない集合 X への写像を X の n-parametrization あるいは単に parametrization と呼び，その全体を $\mathbf{Param}_n(X)$ と表す．また，$\mathbf{Param}(X) = \bigcup_n \mathbf{Param}_n(X)$ とする.

定義 空でない集合 X の parametrizations の集合 $\mathcal{D}$ が以下をみたすとき，X 上の diffeology と呼ぶ.

- $\forall x \in X\ \forall n \in \mathbf{N}_0\ \exists c_x \in \mathcal{D} \cap \mathbf{Param}_n(X)\ \ \operatorname{Im} c_x = \{x\}$.
- $P \in \mathbf{Param}(X)$, $\forall u \in U\ \exists V \in \mathcal{N}(u)\ P|_V \in \mathcal{D} \Rightarrow P \in \mathcal{D}$.
- $\forall (P\colon U \to X) \in \mathcal{D}\ \forall F \in C^\infty(V, U)\ \ P \circ F \in \mathcal{D}$.

$(X, \mathcal{D})$ を diffeological space と呼び，diffeology $\mathcal{D}$ の元を plot と呼ぶ.

Example

例

U を domain とする．このとき，任意の domain からの本来の意味での滑らかな写像全体の集合は domain U 上の diffeology であり，U 上の standard diffeology と呼ぶ.

例

M を滑らかな多様体とする．このとき，任意の domain からの本来の意味での滑らかな写像全体の集合は M 上の diffeology である.

例

X を位相空間とする．このとき，任意の domain からの連続写像全体の集合は X 上の diffeology である.

Diffeologically smooth map

定義 Diffeological space の間の写像 $f\colon (X,\mathcal{D}_X)\to(Y,\mathcal{D}_Y)$ が diffeologically smooth であるとは，次をみたすことである．

$$\forall(P\colon U\to X)\in\mathcal{D}_X\ \ f\circ P\in\mathcal{D}_Y.$$

また，f が全単射かつ f とその逆写像 f^{-1} が diffeologically smooth であるとき，f を diffeologically diffeomorphism と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "f\circ P"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Induction(入射)

定義 Diffeological space の間の写像 $f\colon (X,\mathcal{D}_X)\to(Y,\mathcal{D}_Y)$ が induction であるとは，f が単射かつ diffeologically smooth であり，$P\in\mathcal{D}_Y$ で $\operatorname{Im}P\subset\operatorname{Im}f$ となるものに対し，$f^{-1}\circ P\in\mathcal{D}_X$ となることである．

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "f^{-1}\circ P"'] \arrow[d, "P"] \\ X & \operatorname{Im}P\subset\operatorname{Im}f \arrow[l, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

命題

全射な induction は diffeologically diffeomorphism である．

Sikorski space

定義 空でない X 上の実数値関数の集合 $\mathcal{F}$ が以下をみたすとき，$\mathcal{F}$ と X 上の $\mathcal{F}$ による始位相を X 上の Sikorski 構造と呼ぶ.

- $(f\colon X \to \mathbf{R}) \in \mathrm{Map}(X, \mathbf{R})$, $\forall x \in X\ \exists V \in \mathcal{N}(x)\ \exists (g\colon X \to \mathbf{R}) \in \mathcal{F}$ $f|_V = g|_V \Rightarrow (f\colon X \to \mathbf{R}) \in \mathcal{F}$.
- $\forall k \in \mathbf{Z}_{>0}\ \forall f_1, f_2, \dots f_k \in \mathcal{F}\ \forall F \in C^\infty(\mathbf{R}^k, \mathbf{R})\ F(f_1, f_2, \dots f_k) \in \mathcal{F}$.

$(X, \mathcal{F})$ を Sikorski 空間と呼ぶ．ここで，X には $\mathcal{F}$ による始位相を入れる.

$$\begin{array}{cccc} F(f_1, f_2, \dots f_k) : & X & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \uplus & & \uplus \\ & x & \longmapsto & F(f_1(x), f_2(x), \dots f_k(x)) \end{array}$$

Sikorski smooth map

定義 Sikorski space の間の写像 $\alpha\colon (X, \mathcal{F}_X) \to (Y, \mathcal{F}_Y)$ が Sikorski smooth であるとは，次をみたすことである．

$$\forall (f\colon Y \to \mathbf{R}) \in \mathcal{F}_Y \ \ f \circ \alpha \in \mathcal{F}_X.$$

また，f が全単射かつ f とその逆写像 f^{-1} が Sikorski smooth であるとき，f を Sikorski diffeomorphism と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "f\circ\alpha"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

Category

位相空間と連続写像のなす圏を **Topology** と表す.

Diffeological space と diffeologically smooth map のなす圏を **Diffeology** と表す.

Sikorski space と Sikorski smooth map のなす圏を **Sikorski** と表す.

Diffeology and Sikorski

命題

$(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とする．このとき，

$$\Phi\mathcal{D} = \{(f\colon X \to \mathbf{R}) \in \mathrm{Map}(X, \mathbf{R}) \mid \forall (P\colon U \to X) \in \mathcal{D}\ f \circ P \in \mathrm{C}^{\infty}(U, \mathbf{R})\}$$

は集合 X 上の Sikorski 構造である．

命題

$(X, \mathcal{F})$ を Sikorski space とする．このとき，

$$\Pi\mathcal{F} = \{(P\colon U \to X) \in \mathbf{Param}(X) \mid \forall (f\colon X \to \mathbf{R}) \in \mathcal{F}\ f \circ P \in \mathrm{C}^{\infty}(U, \mathbf{R})\}$$

は集合 X 上の diffeology である．

Adjoint functor

先の命題により関手 $\Phi\colon \mathbf{Diffeology} \to \mathbf{Sikorski}$ と関手 $\Pi\colon \mathbf{Sikorski} \to \mathbf{Diffeology}$ が定まる.

定理

関手 $\Phi\colon \mathbf{Diffeology} \to \mathbf{Sikorski}$ は関手 $\Pi\colon \mathbf{Sikorski} \to \mathbf{Diffeology}$ の左随伴関手である.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Diffeology} \arrow[r, shift left=2, "\Phi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Sikorski} \arrow[l, shift left=2, "\Pi"] \end{tikzcd}$$

Diffeology and Topology

定義 (Zemmour [IZ13])

Diffeological space $(X, \mathcal{D})$ の部分集合 A が開集合であるとは，次をみたすことである．

$$\forall (P\colon U \to X) \in \mathcal{D} \quad P^{-1}(A) : \text{open in } U$$

この開集合全体のなす開集合系は X 上の位相を定める．この位相を D-topology と呼ぶ．

命題

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．このとき，任意の domain からの連続写像全体の集合は X 上の diffeology である．

Adjoint functor

先の定義と命題により関手 $T\colon \mathbf{Diffeology} \to \mathbf{Topology}$ と関手 $D\colon \mathbf{Topology} \to \mathbf{Diffeology}$ が定まる.

定理

関手 $T\colon \mathbf{Diffeology} \to \mathbf{Topology}$ は関手 $D\colon \mathbf{Topology} \to \mathbf{Diffeology}$ の左随伴関手である.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Diffeology} \arrow[r, shift left=2, "T"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Topology} \arrow[l, shift left=2, "D"] \end{tikzcd}$$

Frölicher space

定義 X を空でない集合, $\mathcal{F} \subset \mathrm{Map}(X, \mathbf{R})$, $\mathcal{C} \subset \mathrm{Map}(\mathbf{R}, X)$ とする.
$\Phi\mathcal{C} = \mathcal{F}$ かつ $\Pi\mathcal{F} = \mathcal{C}$ となるとき, $(X, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ を Frölicher space という.

定義 $(X, \mathcal{C}_X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{C}_Y, \mathcal{F}_Y)$ を Frölicher space とし, $\alpha\colon X \to Y$ を写像とする. このとき, 以下は同値である.

(i) $\forall (f\colon X \to \mathbf{R}) \in \mathcal{F},\ f \circ \alpha \in \mathcal{F}_X$

(ii) $\forall (c\colon \mathbf{R} \to X) \in \mathcal{C}_X,\ \forall (f\colon Y \to \mathbf{R}) \in \mathcal{F}_Y,\ f \circ \alpha \circ c \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$

(iii) $\forall (c\colon \mathbf{R} \to X) \in \mathcal{C}_X,\ \alpha \circ c \in \mathcal{C}_Y$

これらをみたすとき, α は Frölicher smooth であるという.

Frölicher space と Frölicher smooth map のなす圏を **Frölicher** と表す.

Reflexivety

定義 $(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とする．このとき, 以下は同値である．

$$\Pi\Phi\mathcal{D} = \mathcal{D}$$

$$\exists \mathcal{F} \subset \mathrm{Map}(X, \mathbf{R}), \ \Pi\mathcal{F} = D$$

これらをみたすとき, $(X, \mathcal{D})$ は reflexive であるという．
$(X, \mathcal{F})$ を Sikorski space とする．このとき, 以下は同値である．

$$\Phi\Pi\mathcal{F} = \mathcal{F}$$

$$\exists \mathcal{D} \subset \mathrm{Param}(X), \ \Phi\mathcal{D} = F$$

これらをみたすとき, $(X, \mathcal{F})$ は reflexive であるという．

Reflexivety

reflexive diffeological space と diffeologically smooth な写像のなす圏を **Reflexive Diffeology** と表し, reflexive Sikorski space と Sikorski smooth な写像のなす圏を **Reflexive Sikorski** と表す.

系

Reflexive Diffeology≅**Reflexive Sikorski** が成立する.

定理

Reflexive Diffeology≅**Reflexive Sikorski**≅**Frölicher** が成立する.

目次

Preparation

滑らかな関数 $l\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と $\lambda\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を以下で定める.

$$l(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \end{cases} \qquad \lambda(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t l(3x) l(3-3x) dx,$$

$$\phi(t) = \int_0^{\frac{1}{2}+t} \lambda(x) dx.$$

ここで, $\alpha = \displaystyle\int_0^1 l(3x) l(3-3x) dx$ である. このとき, 以下が成立する.

(1) 任意の $t \leq -1/2$ に対し, $\phi(t) = 0$ である.

(2) 任意の $t \geq 1/2$ に対し, $\phi(t) = t$ である.

(3) $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は $[-1/2, \infty)$ 上で狭義単調増加関数である.

Preparation

$n, m \in \mathbf{N}_0$ とする．このとき，４つの境界付き多様体を以下で定める．

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{n-1} &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{u}\| \geq 1\}, \qquad D^m = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^m \mid \|\mathbf{v}\| \leq 1\}, \\ \mathbf{D}^{n,m} &= \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid \|\mathbf{u}\| \geq 1 - \phi(2 - \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|)\}, \\ \mathbf{S}^{n-1,m} &= \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid \|\mathbf{u}\| \geq 1\} = \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{R}^m. \end{aligned}$$

また，

$$\partial_0 \mathbf{S}^{n-1,m} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid \|\mathbf{u}\| = 1, \ \|\mathbf{v}\| \leq 3/2\}.$$

と定める．

命題

$\mathbf{S}^{n-1,m} \subset \mathbf{D}^{n,m}$ である．

Definition of fat smooth CW complexes

定義 Diffeological space X 上の Fat smooth CW 構造とは，Diffeological space の 3 系 $(X^{(n)}; \mathring{X}^{(n)}, \partial X^{(n)})$ の族 $(\partial X^{(n)} = X^{(n)} \setminus \mathring{X}^{(n)})$，集合 J_{n+1} 上の関数の $m_{n+1}\colon J_{n+1} \to \mathbf{N}_0$ の族，3 系の diffeologically smooth な写像

$$h_{n+1}\colon (\coprod_{j \in J_{n+1}} \mathbf{S}^{n, m_{n+1}(j)}; \coprod_{j \in J_{n+1}} \operatorname{Int} \mathbf{S}^{n, m_{n+1}(j)}, \coprod_{j \in J_{n+1}} \partial \mathbf{S}^{n, m_{n+1}(j)}) \to (X^{(n)}; \mathring{X}^{(n)}, \partial X^{(n)})$$

の族で次をみたすものである．ここで，$n \geq -1$ である．

1. $X^{(-1)} = \mathring{X}^{(-1)} = \partial X^{(-1)} = \emptyset$
2. $n \in \mathbf{N}_0$ に対し，$(X^{(n)}; \mathring{X}^{(n)}, \partial X^{(n)})$ は $(X^{(n-1)}; \mathring{X}^{(n-1)}, \partial X^{(n-1)})$ と上記のデータを用いて次により与えられる．

Definition of fat smooth CW complexes

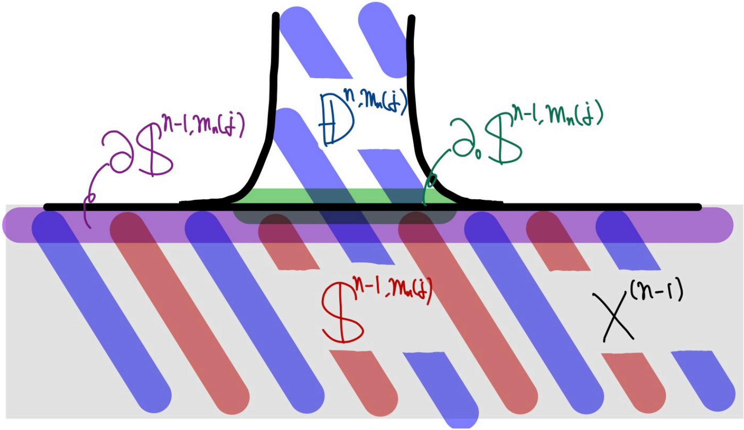
a. 以下の図式は **Diffeology** における pushout である．

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{j\in J_n} \mathbf{S}^{n-1,m_n(j)} & \xrightarrow{h_n} & X^{(n-1)} \\
{\scriptstyle i_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{i}_n} \\
\coprod_{j\in J_n} \mathbf{D}^{n,m_n(j)} & \xrightarrow[\widehat{h}_n]{} & X^{(n)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\coprod_{j\in J_n} \operatorname{Int}\mathbf{S}^{n-1,m_n(j)} & \xrightarrow{\operatorname{Int} h_n} & \mathring{X}^{(n-1)} \\
{\scriptstyle \operatorname{Int} i_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{Int}\widehat{i}_n} \\
\coprod_{j\in J_n} \operatorname{Int}\mathbf{D}^{n,m_n(j)} & \xrightarrow[\operatorname{Int}\widehat{h}_n]{} & \mathring{X}^{(n)}
\end{array}$$

b. X は $X^{(n)}$ の余極限である．

X が fat smooth CW 構造をもつとき，fat smooth CW complex と呼び，写像 h_n をその接着写像と呼ぶ．また，$X = X^{(n)}$ となる自然数 n が存在するとき，X は有限次元であると呼ぶ．

Image of fat smooth CW complexes

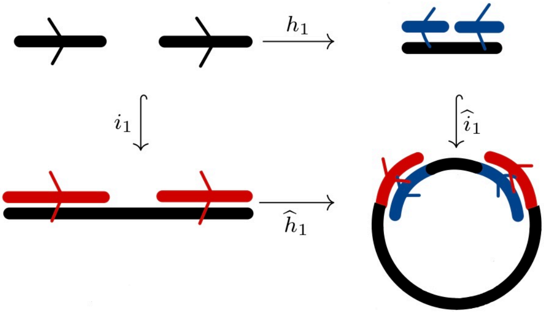


Example of fat smooth CW complexes

命題

S^1 は fat smooth CW complex である.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}^{0,0} \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, hook, "i_1"'] & \mathbf{D}^{0,1} \arrow[d, hook, "\widehat{i}_1"] \\ \mathbf{D}^{1,0} \arrow[r, "\widehat{h}_1"'] & S^1 \end{tikzcd}$$



ここで, $h_1 : \mathbf{S}^{0,0} \to \mathbf{D}^{0,1}$ は $u \in \mathbf{S}^{0,0} = \mathbf{S}^0$ に対し, $h_1(u) = \frac{2u}{1+|u|^2}$ と定める.

EMSF

定義 Fat smooth CW complex X が regular であるとは，任意の $n \in \mathbf{N}_0$ に対し，接着写像 h_n がその像への induction であることである．

定義 Diffeological space $(X, \mathcal{D})$ が十分多くの滑らかな関数をもつとは，X の D-topology が次の形の開基をもつことである．

$$\{f^{-1}((0,1)) \mid f \in C^\infty(X, \mathbf{R})\}$$

定理 (Watts [Wat12], Iwase [IWA22])

- 滑らかな多様体は十分多くの滑らかな関数をもつ．
- Smooth CW complex は十分多くの滑らかな関数をもつ．

Smooth partition of unity and EMSF

定理

Regular fat smooth CW complex は滑らかな 1 の分割をもつ.

定理

Regular fat smooth CW complex は十分多くの滑らかな関数をもつ.

Reflexivity

定義 Diffeological space $(X, \mathcal{D})$ が reflexive であるとは，次をみたすことである．

$$\mathcal{D} = \{(P \colon U \to X) \in \mathbf{Param}(X) \mid \forall f \in C^\infty(X, \mathbf{R})\ f \circ P \in C^\infty(U, \mathbf{R})\}$$

定理

Regular かつ有限次元である fat smooth CW complex は reflexive である．

定理

滑らかな閉多様体は reflexive fat smooth CW complex である．

参考文献

[IK] Norio Iwase and Yuki Kojima. "A closed manifold is a fat CW complex". In: arXiv:2309.07379 (Sep. 2023).

[II15] Norio Iwase and Nobuyuki Izumida. “Mayer-Vietoris sequence for differentiable/diffeological spaces”. In: arXiv:1511.06948 (Nov. 2015).

[IWA22] Norio IWASE. “WHITNEY APPROXIMATION FOR SMOOTH CW COMPLEX”. In: Kyushu Journal of Mathematics 76.1 (2022), pp. 177–186.

[IZ13] Patrick Iglesias-Zemmour. Diffeology. Vol. 185. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, pp. xxiv+439.

[Sou80] J.-M. Souriau. “Groupes differentiels”. In: Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca, 1979). Vol. 836. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York, 1980, pp. 91-128.

[SYH18] Kazuhisa Shimakawa, Kohei Yoshida, and Tadayuki Haraguchi. “Homology and cohomology via enriched bifunctors”. In: Kyushu J. Math. 72.2 (2018), pp. 239–252.

[Wat12] Jordan Watts. Diffeologies, Differential Spaces, and Symplectic Geometry. Thesis (Ph.D.)–University of Toronto (Canada). ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2012, p. 146.