基数不変量入門

山添隆志

すうがく徒のつどい

2023 年 9 月 17 日

目次

濃度

基数不変量分野は “ものの数” を扱う分野である.
ものの数の比較は “単射の存在” に一般化されるのだった

定義

- 集合 A から B への単射が存在するとき, $|A| \leq |B|$ と書く.
- $|A| \leq |B|$ かつ $|A| \geq |B|$ のとき $|A| = |B|$ と書く.
- $|A| \leq |B|$ かつ $|A| \neq |B|$ のとき $|A| < |B|$ と書く.

Fact

- $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$(カントールの対角線論法).
- $|A| \leq |B| \Leftrightarrow B$ から A への全射が存在する (選択公理).
- $|A| = |B| \Leftrightarrow A$ から B への全単射が存在する (ベルンシュタインの定理).

濃度 $|A|$ を実体として扱いたい. 素朴には “全単射が存在する” という同値関係による同値類でよさそうだが, 実はうまくいかない.

基数

代わりに "同値類の代表元" の役割を果たす特殊な集合 (基数) を考えることで集合論は $|A|$ を実体として扱うことに成功している.

Fact

1. 基数と呼ばれる特別な集合が存在し, 基数 κ, λ に対しては大小関係 $\kappa \leq \lambda$ が存在する.
2. 自然数は基数である (有限基数と呼ばれる).
3. 任意の集合 A に対しそれと全単射を持つ基数が一意に存在するので, これを $|A|$ と書く (A の size と言う).
4. 基数の大小関係の意味での $|A| \leq |B|$ と, 上で定義した単射の存在の意味での $|A| \leq |B|$ は同値になる.
5. 基数は整列されている. すなわち基数からなる空でない集合は最小元を持つ順序集合になる.

特に 5 つ目の性質から, 空でない集合族 F に対して "F の元のうち size 最小の集合" が必ず存在する.

基数

いくつか記法を定める.

定義

- $\omega := \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\aleph_0$ を可算無限基数とする．すなわち, $\aleph_0 := |\omega|$.
- $\mathfrak{c}$ および $2^{\aleph_0}$ を連続体濃度とする．すなわち, $\mathfrak{c} := 2^{\aleph_0} := |\mathbb{R}|$.
- $\aleph_1$ を最小の非可算基数とする．すなわち,
  $\aleph_1 := \min\{\kappa : \kappa$は基数で, $\kappa > \aleph_0\}$.
- 集合 A と基数 κ に対し, $[A]^\kappa := \{B \subseteq A : |B| = \kappa\}$.
  $[A]^{\leq\kappa} := \{B \subseteq A : |B| \leq \kappa\}, [A]^{<\kappa} := \{B \subseteq A : |B| < \kappa\}$.

A が可算集合 $\Leftrightarrow |A| \leq \aleph_0 \Leftrightarrow |A| < \aleph_1$, A が可算無限集合 $\Leftrightarrow |A| = \aleph_0$, A が無限集合 $\Leftrightarrow |A| \geq \aleph_0$, A が非可算集合 $\Leftrightarrow |A| > \aleph_0 \Leftrightarrow |A| \geq \aleph_1$.

size 計算

無限基数どうしの "足し算", "掛け算" は単純である.

Fact(基数演算)

無限集合 A, B に対し, $|A \cup B| = |A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$.

基数演算を用いて, size 計算のウォーミングアップをしてみよう.
まずは, 可算無限集合になる集合の例である.

補題

1. A,B は無限集合で, 各 $a \in A$ に対し無限集合 B_a は size $\leq |B|$ とする. このとき, $|\bigcup_{a \in A} B_a| \leq \max\{|A|, |B|\}$. 特に, 可算集合の可算和は可算である.
2. $[\omega]^{<\aleph_0}$, $\omega^{<\omega}$ は size $\aleph_0$ である. ただし, 集合 A に対し $A^{<\omega} := \bigcup_{n \in \omega}\{s \colon \{0, \ldots, n-1\} \to A\}$ (i.e., $\bigcup_{n \in \omega} A^n$).

size 計算

補題 (再掲)

1. A,B は無限集合で，各 $a \in A$ に対し無限集合 B_a は size $\leq |B|$ とする．このとき，$|\bigcup_{a \in A} B_a| \leq \max\{|A|, |B|\}$．特に，可算集合の可算和は可算である．
2. $[\omega]^{<\aleph_0}$, $\omega^{<\omega}$ は size $\aleph_0$ である．
   ただし，$\omega^{<\omega} := \bigcup_{n \in \omega}\{s\colon \{0, \ldots, n-1\} \to \omega\}(= \bigcup_{n \in \omega} \omega^n)$．

Proof.

1. 全射 $p\colon A \times B \to \bigcup_{a \in A} B_a$ を構成すればよい．各 $a \in A$ に対し B_a は size $\leq |B|$ だから全射 $p_a : B \to B_a$ が存在する．
   $(a, b) \in A \times B$ に対し $p(a, b) = p_a(b)$ とすればこれは全射．
2. size $\geq \aleph_0$ は明らかなので，$\leq \aleph_0$(可算集合であること) を示す．
   $[\omega]^{<\aleph_0} = \bigcup_{n \in \omega}[\omega]^n$ であり，各 $n \in \omega$ に対し
   $|[\omega]^n| \leq |\{s\colon \{0, \ldots, n-1\} \to \omega\}| = |\omega^n| = \aleph_0$ であるから，
   $[\omega]^{<\aleph_0}$, $\omega^{<\omega}$ はどちらも可算集合の可算和である． □

size 計算

次に，連続体濃度になる集合の例を見る．$2 := \{0, 1\}$ とする．

補題

$\mathbb{R}$, 開区間 $(0, 1)$, $2^\omega, \mathcal{P}(\omega), [\omega]^{\aleph_0}, \omega^\omega$ はすべて size $\mathfrak{c}$ である．

Proof.

- $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$ $\because$ tan など．
- $|(0, 1)| = |2^\omega|$ $\because$ 2 進数表示など．
- $|2^\omega| = |\mathcal{P}(\omega)|$ $\because$ 特徴関数による自然な同一視．
- $|\mathcal{P}(\omega)| \geq |[\omega]^{\aleph_0}|$ $\because$ 明らか．
- $|\mathcal{P}(\omega)| = |2^\omega| \leq |[\omega]^{\aleph_0}|$ $\because$ $x \in 2^\omega$ に対し $x' \in 2^\omega$ を $x'(2n) = x(n)$, $x'(2n+1) = 1$ で定めると $2^\omega \ni x \mapsto (x')^{-1}(\{1\}) \in [\omega]^{\aleph_0}$ が単射．
- $|2^\omega| \leq |\omega^\omega|$ $\because$ 明らか．
- $|\omega^\omega| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = |2^\omega|$ $\because$ $|\omega^\omega| \leq |\mathcal{P}(\omega \times \omega)| = |\mathcal{P}(\omega)|$. $\square$

ちなみに，集合論ではこのような size $\mathfrak{c}$ の集合の元をすべて実数と呼ぶ．

連続体仮説と基数不変量

冒頭で述べた事実 $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ は基数の言葉で書くと $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ もしくは $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ となる．Cantor は次のことを予想した．

連続体仮説

$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ に違いない．

連続体仮説は集合論の公理系から独立であることが示された:

定理 (Gödel,1940 and Cohen,1963)

連続体仮説は証明も反証もできない．

特に連続体仮説 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ が証明できないという結果を受けて誕生した分野が基数不変量分野である．

基数不変量

定義 (基数不変量)

$\aleph_1 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ となる定義可能な基数 κ を (実数上の) 基数不変量と呼ぶ.

基数不変量の大小関係についての分析を通じて, (実数上の) 無限量がなす構造を明らかにすることが当分野の主な研究目的である.

大小関係の分析に関しては 2 つの方向性からのアプローチがある.

基数不変量の分析の方向性

- (a) 基数不変量 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ に対して不等式 $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{y}$ を証明する.
- (b) 不等式 $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{y}$ が証明できないことを証明する.

(b) に関しては Cohen が連続体仮説の証明不可能性を示す際に用いた強制法とい高度な技術を要するため, 本講演では (a) のみ扱う.

dominating number $\mathfrak{d}$ と unbounded number $\mathfrak{b}$

初等的な無限組み合わせ論で定義できる基数不変量である, ω^ω に関する量 dominating number $\mathfrak{d}$ と unbounded number $\mathfrak{b}$ を導入する.

定義

1. $f, g \in \omega^\omega$ に対し $f \leq^* g :\Leftrightarrow \exists m \in \omega,\ \forall n > m,\ f(n) \leq g(n)$.
2. $D \subseteq \omega^\omega$ が dominating family $:\Leftrightarrow \forall f \in \omega^\omega,\ \exists g \in D,\ f \leq^* g$.
   $B \subseteq \omega^\omega$ が unbounded family$:\Leftrightarrow \forall f \in \omega^\omega, \exists g \in B, \neg(g \leq^* f)$.
3. dominating family の最小の size を $\mathfrak{d}$ で表し, unbounded family の最小の size を $\mathfrak{b}$ で表す.

3 つ目は基数の整列性による. 即ち
$\mathscr{D} := \{D \subseteq \omega^\omega : D$ は dominating family$\}$,
$\mathscr{B} := \{B \subseteq \omega^\omega : B$ は unbounded family$\}$ とし,
$\mathfrak{d} = \min\{|D| : D \in \mathscr{D}\}$, $\mathfrak{b} = \min\{|B| : B \in \mathscr{B}\}$ ということである.
従って, $\mathfrak{d}$ や $\mathfrak{b}$ が定義可能であるためには, $\mathscr{D}$ や $\mathscr{B}$ が空でないこと, 即ち dominating family や unbounded family が存在する必要がある.

$\mathfrak{d}$ と $\mathfrak{b}$ に関する不等式 $\aleph_1 \le \mathfrak{b} \le \mathfrak{d} \le \mathfrak{c}$

定理

$\mathfrak{d}, \mathfrak{b}$ は定義可能で $\aleph_1 \le \mathfrak{b} \le \mathfrak{d} \le \mathfrak{c}$.

Proof. $\mathfrak{d}$ は定義可能で $\mathfrak{d} \le \mathfrak{c}$: $f \in \omega^\omega$ に対し $f \le^* f$ なので ω^ω は dominating family.
$\mathfrak{b}$ は定義可能で $\mathfrak{b} \le \mathfrak{d}$: size $\mathfrak{d}$ の dominating family $D \subseteq \omega^\omega$ をとり, $B := \{g+1 \in \omega^\omega : g \in D\}$ とする. 任意に $f \in \omega^\omega$ をとる. D は dominating family なので, $\exists g \in D$, $f \le^* g$ である. このとき $\exists m \in \omega, \forall n > m, f(n) \le g(n) < g(n)+1$ より特に $\neg(g+1 \le^* f)$. 従って B は size $\le |D| = \mathfrak{d}$ の unbounded family である.
$\aleph_1 \le \mathfrak{b}$: 関数を可算個集めた $F = \{f_i : i \in \omega\} \subseteq \omega^\omega$ が unbounded family になりえないことを示せばよい. $f \in \omega^\omega$ を, 各 $n \in \omega$ に対し $f(n) = \max\{f_i(n) : i \le n\}$ となるように定める. すると任意の $f_{i_0} \in F$ に対し, すべての $n \ge i_0$ で $f_{i_0}(n) \le \max\{f_i(n) : i \le n\} = f(n)$ なので, $f_{i_0} \le^* f$ である. つまり f は F が unbounded family でないことを witness している. □

splitting number $\mathfrak{s}$ と reaping number $\mathfrak{r}$

次に, $[\omega]^{\aleph_0}$ 上の基数不変量である splitting number $\mathfrak{s}$ と reaping number $\mathfrak{r}$ を導入する.

定義

1. $a, b \in [\omega]^{\aleph_0}$ に対し a は b に split される :⇔ $|a \cap b| = |a \setminus b| = \aleph_0$.
2. $S \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ が splitting family :⇔ $\forall a \in [\omega]^{\aleph_0},\ \exists b \in S,\ a$ は b に split される.
   $R \subseteq \omega^\omega$ が reaping family :⇔ $\forall a \in [\omega]^{\aleph_0},\ \exists b \in R,\ b$ は a に split されない.
3. splitting family の最小の size を $\mathfrak{s}$ で表し, reaping family の最小の size を $\mathfrak{r}$ で表す.

splitting number $\mathfrak{s}$ と reaping number $\mathfrak{r}$

補題

$[\omega]^{\aleph_0}$ は splitting family かつ reaping family である.
特に, $\mathfrak{s}, \mathfrak{r}$ は定義可能で $\leq \mathfrak{c}$.

Proof. $a = \{a_0 < a_1 < \cdots\} \in [\omega]^{\aleph_0}$ に対し $\{a_{2i} : i \in \omega\}$ は a を split し, a 自身は a に split されない. □

$\mathfrak{s}, \mathfrak{r}$ が非可算であることは後ほど見る.

また, $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ との関係として $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$ が成立するが, この 2 つの不等式は実は 1 つの構造で統一的に扱うことができる. これは 4 章で詳しく見ることにする.

pseudo-intersection number $\mathfrak{p}$

$[\omega]^{\aleph_0}$ に関する量としてもう 1 つ, 少し複雑な定義の pseudo-intersection number $\mathfrak{p}$ を導入する.

定義 (pseudo-intersection number $\mathfrak{p}$)

1. $x, y \in [\omega]^{\aleph_0}$ に対し, $x \subseteq^* y :\Leftrightarrow |x \setminus y| < \omega$.
2. $x \in [\omega]^{\aleph_0}$ と $F \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ に対し、x が F の pseudo-intersection であるとは, 任意の $y \in F$ に対し $x \subseteq^* y$ となることである.
3. $F \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ が SFIP(Strong Finite Intersection Property) を持つとは, 任意の (空でない)$F_0 \in [F]^{<\aleph_0}$ に対し $\left|\bigcap_{a \in F_0} a\right| = \aleph_0$ となることである.
4. SFIP を持つが pseudo-intersection を持たない family を pseudo-intersection family と呼び, その最小 size として pseudo-intersection number $\mathfrak{p}$ を定める.

$\mathfrak{p} \leq \mathfrak{s}$

定理

splitting family の部分集合に，pseudo-intersection family が存在する．特に $\mathfrak{p}$ は定義可能で $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{s}$.

証明には Zorn の補題を用いる．

補題 (Zorn の補題)

空でない順序集合 $(A, \leq)$ が Zorn property をみたすとき，すなわち任意の空でない全順序部分集合が上界を持つとき，A は極大元を持つ．

$\mathfrak{p} \leq \mathfrak{s}$

定理 (再掲)

splitting family の部分集合に，pseudo-intersection family が存在する．特に $\mathfrak{p}$ は定義可能で $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{s}$.

Proof. splitting family $S \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ をとり，
$X := \{F \subseteq S : F$ は SFIP を持つ $\}$ とおく．$\emptyset \in X$ かつ X は $\subseteq$ による Zorn property を満たすので，X は $\subseteq$-極大元 F' を持つ．F' が pseudo-intersection $a \in [\omega]^{\aleph_0}$ を持ったとして矛盾を導けばよい．S は splitting family なので a を split する s が存在する．特に
$|a \setminus s| = \aleph_0$ なので $\neg(a \subseteq^* s)$ だから $s \notin F'$.
$F' \cup \{s\}$ が SFIP を持つことを示すために，$s_0 \ldots, s_{n-1} \in F'$ を任意にとって $s_n := \bigcap_{i<n} s_i$ とおき，$|s \cap s_n| = \aleph_0$ を示せばよい．
$|(s \cap a) \setminus (s \cap s_n)| = |s \cap (a \setminus s_n)| \leq |a \setminus s_n| = |\bigcup_{i<n}(a \setminus s_i)| < \aleph_0$
であり，$|s \cap a| = \aleph_0$ なので $|s \cap s_n| = \aleph_0$ である．
以上より $F' \subsetneq F' \cup \{s\} \in X$ なので，これは F' の極大性に矛盾．□

$\aleph_1 \leq \mathfrak{p}$

定理

$\aleph_1 \leq \mathfrak{p}$.

Proof. 任意に与えられた SFIP を満たす可算集合 $\{a_i \in [\omega]^{\aleph_0} : i \in \omega\}$ が psuedo-intersection を持つことを示せばよい．$a := \{n_0 < n_1 < \cdots\} \in [\omega]^{\aleph_0}$ を $n_i \in a_0 \cap \cdots \cap a_i$ となるようにとる．これは SFIP より $a_0 \cap \cdots \cap a_i$ が無限集合なので n_{i-1} より大きな元を持つから可能である．任意の i に対して $n_i, n_{i+1}, \ldots \in a_i$ なので，$a \setminus a_i \subseteq \{n_0, \ldots, n_{i-1}\}$ だから $a \subseteq^* a_i$. 従って a は $\{a_i : i \in \omega\}$ の psuedo-intersection である． □

ルベーグ零集合族 $\mathcal{N}$ と痩せ集合族 $\mathcal{M}$

$\mathbb{R}$ 上の測度や位相に関する基数不変量を導入する.

ルベーグ零集合族 $\mathcal{N}$

$\mathcal{N}$ をルベーグ測度 0 の集合 (Lebesgue null set) からなる集合族とする. すなわち μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度として,
$\mathcal{N} := \{A \subseteq \mathbb{R} : \mu(A) = 0\}$.

痩せ集合族 $\mathcal{M}$

閉包の内部が空であるような集合を疎集合 (nowhere dense set) と言う.
疎集合の可算和で書けるような集合を痩せ集合 (meager set) と言い, それらを集めた集合族を $\mathcal{M}$ と書く. すなわち,
$\mathcal{M} := \left\{\bigcup_{n\in\omega} A_n : \text{各 } A_n \subseteq \mathbb{R} \text{ は疎集合}\right\}$.

ルベーグ零集合族 $\mathcal{N}$ と痩せ集合族 $\mathcal{M}$

$\mathbb{R}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ について次が成り立つ.

Fact

- 有理端点の開区間全体 $\mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) := \{(p,q) : p,q \in \mathbb{Q}\}$ は $\mathbb{R}$ の可算開基である. 特に $\mathbb{R}$ の任意の開集合は $\mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ の元の可算和で表される.
- $A \in \mathcal{N} \Leftrightarrow$ ある可算個の開集合 $\{A_n : n \in \omega\}$ が存在し, $A \subseteq \bigcap_{n\in\omega} A_n$ かつ $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{N}$.
- $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow$ ある可算個の閉な疎集合 $\{A_n : n \in \omega\}$ が存在し, $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_n$.
- $A \subseteq \mathbb{R}$ に対し, A が疎集合 $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus A$ が稠密開集合を含む.
- (ベールのカテゴリー定理) 稠密開集合の可算交叉は再び稠密になる. 特に, $\mathbb{R} \notin \mathcal{M}$.
- 実数からなる可算集合は $\mathcal{N}$ にも $\mathcal{M}$ にも含まれる.

ルベーグ零集合族 $\mathcal{N}$ と痩せ集合族 $\mathcal{M}$

$\mathcal{N}$ や $\mathcal{M}$ は $\mathbb{R}$ の部分集合のうち "小さい" ものを集めていると考えられる．この "小ささ" を一般化した概念がイデアルである．

定義 (イデアル)

集合 X の部分集合からなる族 $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ が X 上のイデアル $:\Leftrightarrow$

- $\emptyset \in I, X \notin I$.
- $A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$.
- $A \subseteq B, B \in I \Rightarrow A \in I$.

$\mathcal{N}, \mathcal{M}, [\mathbb{R}]^{<\aleph_1}$ は $\mathbb{R}$ 上のイデアルになっている．

イデアルに関する基数不変量 add(I), cof(I), non(I), cof(I)

"小さい" ものをどのくらい集めると "大きい" ものになるかを表す基数不変量が定義でき, "大きい" の種類によって次の 4 種類がある.

定義 (add(I), cof(I), non(I), cof(I))

集合 X 上のイデアル I は非自明, すなわち $\forall x \in X, \{x\} \in I$ とする. このとき次の 4 つの基数不変量が定義できる:

- add$(I) := \min\left\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq I \text{ かつ } \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \notin I\right\}$.
- cov$(I) := \min\left\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq I \text{ かつ } \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = X\right\}$.
- non$(I) := \min\{\,|A| : A \subseteq X \text{ かつ } A \notin I\}$.
- cof$(I) := \min\{\,|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq I \text{ かつ } \forall B \in I,\ \exists A \in \mathcal{A},\ B \subseteq A\}$.

それぞれの upper bound (定義可能であること) は, $\{\{x\} : x \in X\}$ によって add(I), cov$(I) \leq |X|$ がわかり, X によって non$(I) \leq |X|$, I によって cof$(I) \leq |I| \leq |\mathcal{P}(X)|$ がわかる.

Cichoń's diagram

特に, $I = \mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ と $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ に関しては次のような関係が成立することが知られていて, これは Cichoń's diagram と呼ばれる.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathsf{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathsf{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

ここで矢印 $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ は不等式 $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{y}$ が証明できることを表している.
さらに図に表されてない関係としては
$\mathsf{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \mathsf{cov}(\mathcal{M})\}$, $\mathsf{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{d}, \mathsf{non}(\mathcal{M})\}$ がある.

Cichoń's diagram

Cichoń's diagram にあるいくつかの不等式を見てみよう.

定理

1. $\mathrm{Open}(\mathbb{R}) := \{U \subseteq \mathbb{R} : U$ は開集合 $\}$,
   $G_\delta(\mathbb{R}) := \{\bigcap_{n\in\omega} U_n : \{U_n : n \in \omega\} \subseteq \mathrm{Open}(\mathbb{R})\}$ に対し,
   $|\mathrm{Open}(\mathbb{R})| \leq \mathfrak{c}, |G_\delta(\mathbb{R})| \leq \mathfrak{c}$.
2. $\aleph_1 \leq \mathsf{add}(\mathcal{N}),\ \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$.

Proof.

1. $\mathbb{R}$ は可算開基 $\mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ を持つから $|\mathrm{Open}(\mathbb{R})| = |\{\bigcup_{n\in\omega} O_n : \{O_n : n \in \omega\} \subseteq \mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})\}| \leq |\mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^\omega| \leq |\omega^\omega| = \mathfrak{c}$.
   $|G_\delta(\mathbb{R})| \leq |\mathrm{Open}(\mathbb{R})^\omega| \leq |(\omega^\omega)^\omega| = |\omega^{\omega\times\omega}| = |\omega^\omega| = \mathfrak{c}$.
2. ルベーグ測度が σ 加法的であることから $\aleph_1 \leq \mathsf{add}(\mathcal{N})$ が従う. また, $G_\delta(\mathbb{R}) \cap \mathcal{N}$ が $\mathsf{cof}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$ を witness している.

□

Cichoń's diagram

定理

$\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{N}), \mathrm{non}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{N})$

Proof. $\mathbb{R} \notin \mathcal{N}$ より $\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{N})$ である．$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ を $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$ の witness とする．$N \in \mathcal{A}$ ごとに $x_N \in \mathbb{R} \setminus N$ をとり，$X := \{x_N : N \in \mathcal{A}\}$ とする．$|X| \leq |\mathcal{A}| = \mathrm{cof}(\mathcal{N})$ より，$X \notin \mathcal{N}$ を示せば十分である．$X \in \mathcal{N}$ と仮定すると，$\mathcal{A}$ は $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$ の witness なので $\exists N \in \mathcal{A}, X \subseteq N$ である．しかし $x_N \in X \setminus N$ より矛盾． □

Cichoń's diagram

定理

1. $\exists M \in \mathcal{M}, \exists N \in \mathcal{N}, M \cup N = \mathbb{R}$.
2. $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$, $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N})$.

Proof.

1. 有理数全体を $\mathbb{Q} = \{q_i : i \in \omega\}$ とし, $n \in \omega$ に対し開区間の可算和 D_n を $D_n := \bigcup_{i\in\omega}\left(q_i - 2^{-(n+i+2)}, q_i + 2^{-(n+i+2)}\right)$ で定める. μ を Lebesgue 測度として $\mu(D_n) \leq \sum_{i\in\omega} 2^{-n+i+1} = 2^{-n}$ だから, $N := \bigcap_{n\in\omega} D_n \in \mathcal{N}$ である. $\mathbb{Q} \subseteq D_n$ より D_n は稠密開集合だから, $M := \mathbb{R} \setminus N \in \mathcal{M}$ である.
2. $X \notin \mathcal{M}$ とし, $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$, $\forall a \in N$, $c \neq x + a$ とすると, $\forall x \in X, -x + c \in \mathbb{R} \setminus N = M$ となり, $-X \subseteq -c + M \in \mathcal{M}$ となって $X \notin \mathcal{M}$ に矛盾. 従って $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in X}(x + N)$ なので, $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$ が言えた. $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N})$ も同様.

□

relational system

$\mathfrak{d}$ と $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{r}$ は似た定義をしていた．それらは全て challenge と呼ばれるような元 x と response と呼ばれるような元 y に対し "y が x に response する"($x \sqsubset y$) という relation が定められており,

- すべての challenge に response するような response の必要数
- ひとつの response では response しきれないような challenge の必要数

という形の定義であった．この構造を一般化したのが relational system で, relational system の間の関係に注目したものが Tukey connection (Tukey order) である．

relational system

定義 (relational system)

- X, Y は集合で $\sqsubset$ が $X \times Y$ における relation となっているとき, 3 つ組 $\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ を relational system と呼ぶ. X の元 x を challenge, Y の元 y を response, $x \sqsubset y$ を y は x に response する (y responses x) とも言う.
- $F \subseteq X$ が $\mathbf{R}$-unbounded $:\Leftrightarrow \neg \exists y \in Y, \forall x \in F, x \sqsubset y$.
- $F \subseteq Y$ が $\mathbf{R}$-dominating $:\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists y \in F, x \sqsubset y$.
- $\mathfrak{b}(\mathbf{R}) := \min\{|F| : F \subseteq X, \mathbf{R}\text{-unbounded}\}$.
- $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) := \min\{|F| : F \subseteq Y, \mathbf{R}\text{-dominating}\}$.

以下, 簡単のため $\mathfrak{b}(\mathbf{R}), \mathfrak{d}(\mathbf{R})$ は定義可能で無限基数であるとする.

relational system

relational system を用いて今までの基数不変量を表そう ($\mathfrak{p}$ 除く).

定義 ($\mathfrak{D}, \mathfrak{S}, \bar{I}, C_I$)

- $\mathfrak{D} := \langle \omega^\omega, \omega^\omega, \leq^* \rangle$. $\mathfrak{b}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{d}$ である.
- $\mathfrak{S} := \langle [\omega]^{\aleph_0}, [\omega]^{\aleph_0}, \text{“is split by”} \rangle$. $\mathfrak{b}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{d}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{s}$ である.
- X 上の ideal I に対して, $\bar{I} := \langle I, I, \subseteq \rangle$, $C_I := \langle X, I, \in \rangle$. $\mathfrak{b}(\bar{I}) = \mathrm{add}(I), \mathfrak{d}(\bar{I}) = \mathrm{cof}(I), \mathfrak{b}(C_I) = \mathrm{non}(I)$, $\mathfrak{d}(C_I) = \mathrm{cov}(I)$ である. 以下, $\bar{I}$ を単に I と書く.

定義 ($\mathbf{R}^\perp$)

$\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ の dual となる $\mathbf{R}^\perp := \langle Y, X, \sqsubset^\perp \rangle$ を $y \sqsubset^\perp x :\Leftrightarrow \neg(x \sqsubset y)$ で定める.

$F \subseteq X$ が $\mathbf{R}$-unbounded $\Leftrightarrow$ $F \subseteq X$ が $\mathbf{R}^\perp$-dominating,
$F \subseteq Y$ が $\mathbf{R}$-dominating $\Leftrightarrow$ $F \subseteq Y$ が $\mathbf{R}^\perp$-unbounded,
$(\mathbf{R}^\perp)^\perp = \mathbf{R}$, $\mathfrak{b}(\mathbf{R}^\perp) = \mathfrak{d}(\mathbf{R})$, $\mathfrak{d}(\mathbf{R}^\perp) = \mathfrak{b}(\mathbf{R})$ となる.

Tukey order

relational system の間の関係に注目したものが Tukey connection (Tukey order) である.

定義 (Tukey connection, Tukey order)

relational system $\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle, \mathbf{R}' = \langle X', Y', \sqsubset' \rangle$ に対し, $(\Phi_-, \Phi_+) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ が $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}'$ への Tukey connection であるとは, 関数 $\Phi_- : X \to X', \Phi_+ : Y' \to Y$ が次を満たすこと:

$$\forall x \in X,\ \forall y' \in Y',\ \Phi_-(x) \sqsubset' y' \Rightarrow x \sqsubset \Phi_+(y')$$

$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}'$ への Tukey connection が存在するとき, $\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{R}'$ と書き, $\preceq_T$ を Tukey order と呼ぶ. $\mathbf{R} \cong_T \mathbf{R}' :\Leftrightarrow \mathbf{R} \preceq_T \mathbf{R}'$ かつ $\mathbf{R}' \preceq_T \mathbf{R}$ とし, このとき $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}'$ は Tukey equivalent であると呼ぶ.

Tukey order

Tukey connection について次が成立する．

補題

1. $\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{R}' \Leftrightarrow (\mathbf{R}')^\perp \preceq_T (\mathbf{R})^\perp$.
2. $\mathbf{R} \preceq_T \mathbf{R}' \Rightarrow \mathfrak{b}(\mathbf{R}') \leq \mathfrak{b}(\mathbf{R}),\ \mathfrak{d}(\mathbf{R}) \leq \mathfrak{d}(\mathbf{R}')$.

Proof.

1. $\Phi_-(x) \sqsubset' y' \Rightarrow x \sqsubset \Phi_+(y')$ の対偶を考えることで $(\Phi_-, \Phi_+) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}' \Leftrightarrow (\Phi_+, \Phi_-) : (\mathbf{R}')^\perp \to \mathbf{R}^\perp$ とわかる．
2. $(\Phi_-, \Phi_+) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ とし，まず $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) \leq \mathfrak{d}(\mathbf{R}')$ を示す．size $\mathfrak{d}(\mathbf{R}')$ の $\mathbf{R}'$-dominating family $F \subseteq Y'$ を取る．$x \in X$ を任意に取る．$\Phi_-(x) \in X'$ であり F は $\mathbf{R}'$-dominating だから $\exists y' \in Y',\ \Phi_-(x) \sqsubset' y'$ である．$(\Phi_-, \Phi_+) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ なので $x \sqsubset \Phi_+(y')$ である．$x \in X$ は任意だったから，$\Phi_+[F]$ は $\mathbf{R}$-dominating となる．従って $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) \leq |\Phi_+[F]| \leq |F| = \mathfrak{d}(\mathbf{R}')$. $\mathfrak{b}$ に関して，$\mathfrak{b}(\mathbf{R}') = \mathfrak{d}((\mathbf{R}')^\perp) \leq \mathfrak{d}((\mathbf{R})^\perp) = \mathfrak{b}(\mathbf{R})$ より従う．□

$\mathfrak{b} \le \mathfrak{r}$, $\mathfrak{s} \le \mathfrak{d}$

$\mathfrak{b} \le \mathfrak{r}$, $\mathfrak{s} \le \mathfrak{d}$ を示していこう.

補題

relational system $\mathfrak{D}' := (A, A, <^*)$ を $A = \{f \in \omega^\omega : 0 < f(0) < f(1) < \cdots\}$, $f <^* g \Leftrightarrow \exists m \in \omega,\ \forall n > m,\ f(n) < g(n)$ で定める. このとき $\mathfrak{D}' \cong_T \mathfrak{D}$.

Proof. $f \in \omega^\omega$ に対し $\Phi(f) = f^+$ を $f^+(0) = f(0) + 1,\ f^+(n+1) = \max\{f^+(n), f(n+1)\} + 1$ で定める. $f^+ \in A$ かつ $\forall n \in \omega, f(n) < f^+(n)$ に注意する. このとき $f \le^* g \Rightarrow f <^* g^+$, $f^+ < g \Rightarrow f \le^* g$ より $(\mathrm{id}, \Phi), (\Phi, \mathrm{id})$ が $\mathfrak{D}' \cong_T \mathfrak{D}$ を witness している. □

定義

relational system $\mathfrak{S}'$ を $\mathfrak{S}' := \langle [\omega \setminus \{0\}]^{\aleph_0}, [\omega]^{\aleph_0}, \text{“is split by”} \rangle$ で定める. $|\omega| = |\omega \setminus \{0\}|$ より明らかに $\mathfrak{S}' \cong_T \mathfrak{S}$ である.

$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$

これで準備が整った.

定理

$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$.

$\mathfrak{S}' \preceq_T \mathfrak{D}'$ を示せばよい. $(\Phi_-, \Phi_+) : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{D}'$ を以下で定める. $\Phi_-(a) = e_a$ を a の enumerating function, すなわち $a = \{a_0 < a_1 < \cdots\}$ に対し $e_a(n) = a_n$ で定め $(a \in [\omega \setminus \{0\}]^{\aleph_0}$ より $e_a \in A)$, $\Phi_+(g) := b_g := \bigcup_{k\in\omega} [g^{2k}(0), g^{2k+1}(0))$ と定める (g^l は g の l 回の合成を表し, $[N, M)$ は ω 上の半開区間 $\{n \in \omega : N \leq n < M\}$ を表す). $e_a <^* g$ と仮定して a が b_g に split されることを示す. $m \in \omega$ を $l > m$ に対し $e_a(l) < g(l)$ となるように取る. この l に対し $m \leq g^m(0) < g^l(0)$ なので $g^l(0) \leq e_a(g^l(0)) < g^{l+1}(0)$ となる. 従って $2k > m$ となる任意の $k \in \omega$ に対して $e_a(g^{2k}(0)) \in a \cap b_g$ かつ $e_a(g^{2k+1}(0)) \in a \setminus b_g$ なので, $|a \cap b_g| = |a \setminus b_g| = \aleph_0$ である. つまり b_g は a を split するから, これで (Φ_-, Φ_+) が Tukey connection であることが言えた. $\square$

Cichoń's diagram と Tukey order

Cichoń's diagram も実は次のような Tukey connection が存在することが知られている．ここで矢印はその向きに Tukey connection があることを意味している．

$$\begin{tikzcd}
 & C_{\mathcal{N}} \arrow[r] & C_{\mathcal{M}}^{\perp} \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] & C_{[\mathbb{R}]^{<\aleph_1}} \\
 & & \mathfrak{D}^{\perp} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{D} \arrow[u] & & \\
C_{[\mathbb{R}]^{<\aleph_1}}^{\perp} \arrow[r] & \mathcal{N}^{\perp} \arrow[r] \arrow[uu] & \mathcal{M}^{\perp} \arrow[r] \arrow[u] & C_{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[u] & C_{\mathcal{N}}^{\perp} \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

1 章で示した不等式は，その証明から次のような Tukey order と対応することがわかる (略).

- $\aleph_1 \leq \mathrm{add}(\mathcal{N}),\ \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c} \longleftrightarrow \mathcal{N} \preceq_T C_{[\mathbb{R}]^{<\aleph_1}}$
- $\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{N}), \mathrm{non}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \longleftrightarrow C_{\mathcal{N}}^{\perp} \preceq_T \mathcal{N}$
- $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M}),\ \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N}) \longleftrightarrow C_{\mathcal{M}} \preceq_T C_{\mathcal{N}}^{\perp}$

まとめの図

今までに紹介した不等式をまとめると次図のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & \mathfrak{r} \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[ur] & \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[uurrr] & & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
 & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] & \\
\aleph_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathfrak{p} \arrow[r] & \mathfrak{s} \arrow[uur] & & &
\end{tikzcd}
$$

この図にはまだ追加できる矢印が存在する (証明可能な不等式が他にも存在する). 興味を持った方は以下の付録を是非.

$\mathfrak{s} \leq \mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{N}), \ \mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{r}$

splitting による relational system $\mathfrak{S}$ と Cichoń's diagram の関係も見る．そのために $\mathfrak{S}^\perp$ に別の見方を与える．

定義

$\mathfrak{R} := \langle [\omega]^{\aleph_0}, [\omega]^{\aleph_0}, \sqsubset^{\mathrm{reap}} \rangle := \mathfrak{S}^\perp$ とする．

$a \sqsubset^{\mathrm{reap}} b \Leftrightarrow |a \cap b|$ か $|a \setminus b|$ は finite $\Leftrightarrow a$ の特徴関数 $\chi_a \in 2^\omega$ は b 上いずれ定数 $\Leftrightarrow \exists j \in 2, \ \exists m \in \omega, m < \forall n \in b, \ \chi_a(n) = j$.
$\mathcal{N}$ や $\mathcal{M}$ も実数直線 $\mathbb{R}$ 上ではなくカントール空間と呼ばれる位相空間で考えて議論しやすくする．

定義 (カントール空間)

- $2 = \{0, 1\}$ にコイントス測度，すなわち $\mu_2(\{0\}) = \mu_2(\{1\})$ となる測度 μ_2 を入れ，2^ω をこの測度による積測度 μ を入れる．
- 2 に離散位相を入れ 2^ω にその積位相を入れる．
- この測度と位相が入った空間 2^ω をカントール空間と呼ぶ．

$\mathfrak{s} \leq \mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{N}), \ \mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{r}$

補題

$2^{<\omega} := \bigcup_{n\in\omega} 2^{\{i\in\omega : i<n\}}$ とし, $s \in 2^{<\omega}$ に対し
$[s] := \{x \in 2^{\omega} : s \subseteq x\}$ と定める.

- 上で定義した測度は任意の $s \in 2^{<\omega}$ に対し $\mu([s]) = 2^{-|s|}$ を満たす測度として特徴づけられる.
- 上で定義した位相は $\{[s] : s \in 2^{\omega}\}$ を開基とする位相として特徴づけられる. 特に, $A \subseteq 2^{\omega}$ が稠密開集合
$\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists s \subseteq x, [s] \subseteq A$ かつ $\forall s \in 2^{<\omega}, s \subseteq \exists x \in A$.

Fact

Cantor space 上で定義したルベーグ零集合族 $\mathcal{N}'$ と痩せ集合族 $\mathcal{M}'$ によって定まる, イデアルに関する各 relational system は実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義したものと Tukey equivalent になる. 従って $\mathcal{N}', \mathcal{M}'$ を単に $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ と書き, 同一視する.

$\mathfrak{s} \leq \mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{N}),\ \mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{r}$

定理

$C_{\mathcal{M}}, C_{\mathcal{N}} \preceq_T \mathfrak{R}$, 特に $\mathfrak{s} \leq \mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{N}),\ \mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{r}$.

Proof. カントール空間 2^ω 上で $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を考える．$B \in [\omega]^{\aleph_0}$, $m \in \omega$, $i < 2$ に対し $D_{B,m,i} := \bigcup_{m<k\in B}\{x \in 2^\omega : x(k) = i\}$ とおくと，$D_{B,m,i}$ は稠密開集合．従って $C_{B,i} := \bigcup_{m\in\omega}(2^\omega \setminus D_{B,m,i}) \in \mathcal{M}$.
また，μ をルベーグ測度として $m \in \omega$ に対し
$\mu((2^\omega \setminus D_{B,m,i})) = \mu\left(\bigcap_{m<k\in B}\{x \in 2^\omega : x(k) = 1 - i\}\right) = 0$ なので，$C_{B,i} \in \mathcal{N}$ でもある．従って $\Phi_+(B) := C_B := C_{B,0} \cup C_{B,1}$ とすると $C_B \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ である．
$x \in C_B \Leftrightarrow \exists i \in 2, \exists m \in \omega, m < \forall k \in B, x(k) = 1 - i \Leftrightarrow x$ は B 上いずれ定数 に注意する．$x \in 2^\omega$ に対し $\Phi_-(x) := A_x$ を $x^{-1}(\{0\}), x^{-1}(\{1\})$ のうち無限な方として定める．$A_x \sqsubset^{\mathrm{reap}} B$ とすると，x は B 上いずれ定数となるので，すなわち $x \in C_B$ となる．
以上より，(Φ^-, Φ^+) が 2 つの Tukey connection
$C_{\mathcal{M}} \to \mathfrak{R}$, $C_{\mathcal{N}} \to \mathfrak{R}$ を同時に与えている詳細ことがわかる． □

Martin の公理

講演の冒頭で, 基数不変量の不等式 $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{y}$ の証明不可能性の証明に用いる技術である強制法は高度なため扱わないと述べた.

強制法の理論が特に他分野の人間にとって難しい理由の一つに, 数理論理学的な知識を要する点にある.

しかし本章で扱う Martin の公理は, 数理論理学的な知識を必要とせず, 無限組み合わせ論的な知識だけで強制法の “雰囲気” が味わえる, おトクな題材である.

(これで興味を持った方はぜひ強制法を勉強していただければ幸いである.)

Poset

準備のため用語を定義していく．まずは poset (partially ordered set) を定義する．

定義 (poset)

1. $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})$ が poset:$\Leftrightarrow \leq_{\mathbb{P}}$ が $\mathbb{P}$ 上の前順序 (順序集合の公理から反対称律を除いたもの) かつ $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ がその最大元．すなわち $\forall p, q, r \in \mathbb{P}$,
    - $p \leq_{\mathbb{P}} p$.
    - $p \leq_{\mathbb{P}} q \leq_{\mathbb{P}} r \Rightarrow p \leq_{\mathbb{P}} q$.
    - $p \leq_{\mathbb{P}} \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$.
2. $p, q \in \mathbb{P}$ が compatible :$\Leftrightarrow \exists r \leq p, q$. そうでないとき p と q は incompatible であると言い, $p \perp_{\mathbb{P}} q$ と書く．

通常の数学のように,$(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}), \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \perp_{\mathbb{P}}$ をそれぞれ単に $\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}, \perp$ とも書く．また, poset のことを forcing とも呼ぶ．
さらに, $p \leq q$ のとき p は q の拡大であるという．

poset の例, Cohen forcing $\mathbb{C}$

poset の例を挙げる前に, "関数" の集合論における定義を確認しておこう. 集合論では関数をグラフとして定義している:

定義

- f が関数 $\Leftrightarrow$ f が対からなる集合であって $(a,b),(a,b')\in f \Rightarrow b=b'$.
- 関数 f の定義域を $\mathrm{dom}(f)$, 値域を $\mathrm{ran}(g)$ と書く.
- f が $A\to B$ の部分関数 $:\Leftrightarrow \mathrm{dom}(f)\subseteq A$ かつ $\mathrm{ran}(f)\subseteq B$ であり, さらに $|f|=|\mathrm{dom}(f)|<\aleph_0$ のとき f は $A\to B$ の有限部分関数と呼ぶ.

したがって, 関数 f,g に対し $f\subseteq g$ とは g が f の関数としての拡張になっているということに他ならない.

poset の例, Cohen forcing $\mathbb{C}$

Cohen forcing と呼ばれる poset $\mathbb{C}$ を紹介する.

poset の例

poset $\mathbb{C}$ を以下で定める: $\mathbb{C} := \{p : p$ は $\omega \to \omega$ の有限部分関数 $\}$.
$p \leq q :\Leftrightarrow p \supseteq q$, $\mathbb{1} := \emptyset$.

観察

p と q が compatible$\Leftrightarrow p \cup q$ が関数 $\Leftrightarrow \forall (n,i),(n,j) \in p \cap q, i = j$.

ここで poset の “気持ち” を少し述べておこう.
poset $\mathbb{P}$ は “元をどんどん拡大していって何かを作ろうと” している.
各 $p \in \mathbb{P}$ はその最終的な構造物の “部品” であり, $p \leq q$ は “p の方が q 以上に最終的な構造物に近づいている” という意味である.
compatible とは, “同じものを作ろうとしている” ということである.

この意味で $\mathbb{C}$ は, 全体関数 $\omega \to \omega$ を “作ろうと” している.

dense

次に $\mathbb{P}$ の部分集合の性質である dense を定義する.

定義

dense $D \subseteq \mathbb{P}$ が dense $:\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P},\ \exists q \in D,\ q \leq p$.
$\mathrm{dense}(\mathbb{P}) := \{D \subseteq \mathbb{P} : D$ は dense.$\}$.

"気持ち" で言うと dense とは "どんな風に作ろうとしても途中でこの性質をもつ部品が含まれうる" くらい一般的な性質ということである.
Cohen forcing の例で見てみよう.

dense subset の例

$n \in \omega$ に対し, $D_n := \{p \in \mathbb{C} : n \in \mathrm{dom}(p)\}$ は dense.
$R_n := \{p \in \mathbb{C} : n \in \mathrm{ran}(p)\}$ は dense.

フィルター, ジェネリックフィルター

定義 (フィルター)

$G \subseteq \mathbb{P}$ がフィルター :$\Leftrightarrow$

1. $\mathbb{1} \in G$.
2. $\forall p, q \in G, \exists r \in G, r \leq p, q$.
3. $\forall p, q \in \mathbb{P}, p \leq q$ かつ $p \in G \Rightarrow q \in G$.

フィルター G と $\mathscr{D} \subseteq \mathrm{dense}(\mathbb{P})$ に対し, G が $\mathscr{D}$-ジェネリックフィルター :$\Leftrightarrow \forall D \in \mathscr{D}, D \cap G \neq \emptyset$.

“気持ち” で言うと, フィルターは “ひとつの最終的な構造物を与える部品の集まり” である. 1 つ目の条件は “この集まりが空でない” こと, 2 つ目の条件は “ひとつの同じものを構成しようとしている” こと, 3 つ目の条件は “ある部品を持っていたらそれより以前の部品も持っている” ことを表している. dense というのは “一般的な性質” に対応していたから, $\mathscr{D}$-ジェネリックというのは “最終的な構造物がいくつかの一般的な性質を持つ” ということを表している.

ジェネリックフィルター Existence Lemma, GFEL

次はジェネリックフィルターの存在に関する基礎的な補題である.

ジェネリックフィルター Existence Lemma, GFEL

poset $\mathbb{P}$ と可算な $\mathscr{D} \subseteq \mathrm{dense}(\mathbb{P})$ に対し, $\mathscr{D}$-ジェネリックフィルターが存在する.

Proof. $\mathscr{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ とし, 各 D_n が dense であることを用いて $p_0 := \mathbb{1}, p_n \geq p_{n+1} \in D_n$ となるように帰納的に $\{p_n : n \in \omega\}$ を定める. すると $G := \bigcup_{n\in\omega}\{q \in \mathbb{P} : p_n \leq q\}$ は $\mathscr{D}$-ジェネリックフィルターになる. □

Cohen forcing $\mathbb{C}$ 上のジェネリックフィルター

$\mathbb{C}$ の例で, 各 $D_n := \{p \in \mathbb{C} : n \in \mathrm{dom}(p)\}$ や $R_n := \{p \in \mathbb{C} : n \in \mathrm{ran}(p)\}$ は dense であった.
$\mathscr{D} := \{D_n : n \in \omega\} \cup \{R_n : n \in \omega\}$ は可算なので GFEL より $\mathscr{D}$-ジェネリックフィルター G が存在する.
$f_G := \bigcup_{p \in G} p$ とおき, この f_G について考えてみる.
f_G について成り立つ 3 つの性質を見ていこう.

性質 1.

f_G は関数である. すなわち $(n,i),(n,j) \in f_G \Rightarrow i = j$.

Proof. $(n,i),(n,j) \in f_G = \bigcup_{p \in G} p$ なので,
$\exists p, q \in G, (n,i) \in p \wedge (n,j) \in q$. G はフィルターなので $\exists r \in G$, $r \leq p, q$. すなわち $r \supseteq p, q$ なので $(n,i),(n,j) \in r$. r は関数なので $i = j$ である. □

Cohen forcing $\mathbb{C}$ 上のジェネリックフィルター

性質 2.

f_G は全体関数である．すなわち，$\mathrm{dom}(f_G) = \omega$.

Proof. G は特に $\{D_n : n \in \omega\}$-ジェネリックなので，任意の $n \in \omega$ に対し $\exists p \in D_n \cap G$ であり，このとき $n \in \mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(f_G)$. □

性質 3.

f は全射である．すなわち，$\mathrm{ran}(f_G) = \omega$.

G は特に $\{R_n : n \in \omega\}$-ジェネリックなので，任意の $n \in \omega$ に対し $\exists p \in R_n \cap G$ であり，このとき $n \in \mathrm{ran}(p) \subseteq \mathrm{ran}(f_G)$ □

Cohen forcing $\mathbb{C}$ 上のジェネリックフィルター

性質 1. から 3．までがなぜ成り立ったかを "気持ち" の観点から整理してみよう.

性質 1."f_G は関数" が成立したのは, ジェネリックフィルター G の 2 つ目の条件 $\forall p, q \in G, \exists r \in G, r \leq p, q$, すなわち "ひとつの同じものを構成しようとしている" ことに起因する.

性質 2."f_G は全体関数" が成立したのは, D_n の条件 "$n \in \mathrm{dom}(p)$" が "一般的な" 条件であり, G が全ての D_n と交わるために最終的な構造物がこの一般的な条件を全ての $n \in \omega$ について持っていたことに起因する.

性質 3."f_G は全射" が成立したのは性質 2. のときと同様に R_n の条件 "$n \in \mathrm{ran}(p)$" が一般的な条件であったためである.

$\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$

ジェネリックフィルターがどのくらいの個数の dense subset と交わるか, 即ちジェネリックオブジェクトがどのくらいの個数の一般的な性質を持つか考えてみる．そのための notation である命題 $\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ を導入する.

定義

poset $\mathbb{P}$ と cardinal κ に対し命題 $\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ を $\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa) :\Leftrightarrow$"$\forall \mathscr{D} \in [\mathrm{dense}(\mathbb{P})]^{\leq\kappa}, \exists \mathscr{D}$-ジェネリックフィルター $G \subseteq \mathbb{P}$." で定める.

GFEL は $\forall$poset $\mathbb{P}, \mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\aleph_0)$ と書けるので, $\exists$poset $\mathbb{P}, \neg\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ となる最小の κ で (非可算の) 基数不変量が定義できそうだと期待される.

$\neg\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{c})$

$\exists$poset $\mathbb{P}, \neg\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ となる κ が存在することは次の補題から従う．

補題

$\neg\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{c})$.

Proof. 各 $n \in \omega$ に対し $D_n = \{p : n \in \mathrm{dom}(p)\}$ は dense であった．$f \in \omega^\omega$ に対し $D_f := \{p : \exists n \in \mathrm{dom}(p),\ p(n) \neq f(n)\}$ とおくとこれも dense になる．なぜなら，任意の $\mathbb{P} \in \mathbb{C}$ に対し，$n \in \omega \setminus \mathrm{dom}(p)$ を取り $q := p \cup (n, f(n)+1)$ とすれば $q \leq p$ かつ $q \in D_f$ だからである．$\mathscr{D} := \{D_n : n \in \omega\} \cup \{D_f : f \in \omega^\omega\}$ とおくと $|\mathscr{D}| \leq \mathfrak{c}$ である．$\mathscr{D}$-ジェネリックフィルター G が存在したとして，
$f_G := \bigcup_{p \in G} p$ とおく．G が $\{D_n : n \in \omega\}$-ジェネリックフィルターであることから $f_G \in \omega^\omega$ となるが，G が $\{D_f : f \in \omega^\omega\}$-ジェネリックフィルターであることから $\forall f \in \omega^\omega,\ f \neq f_G$ となって矛盾する．従って $\neg\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{c})$ である． $\square$

$\exists\mathbb{P}, \neg\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$

したがって $\exists\mathbb{P}, \neg\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ となる最小の κ で基数不変量が定義できるが，これは trivial な値 $\aleph_1$ になってしまう．

補題

$\exists$poset $\mathbb{P}, \neg\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$.

Proof. ω から非可算集合への全射を構成してしまうような poset を考える．すなわち，size $\aleph_1$ の A をとり，$\mathbb{C}$ のときと同様に
$\mathbb{C}_A := \{p : p$ は $\omega \to A$ の有限部分関数 $\}$, $p \leq q :\Leftrightarrow p \supseteq q$, $\mathbb{1} := \emptyset$
で poset $\mathbb{C}_A$ を定める．($\mathbb{C}$ のときと同様に) 各 $n \in \omega$ に対し
$D_n = \{p : n \in \mathrm{dom}(p)\}$ は dense であり，各 $a \in A$ に対し
$R_a := \{p \in \mathbb{C}_A : a \in \mathrm{ran}(p)\}$ は dense である．
$\{D_n : n \in \omega\} \cup \{R_a : a \in A\}$-ジェネリックフィルター G が存在したとすると，$f_G := \bigcup_{p\in G} p$ は ω から A への全射となって $|A| = \aleph_1$ に矛盾． $\square$

antichain, ccc, k-linked, centered, k-Knaster

この $\mathbb{C}_A$ は実は (基数不変量に関する強制法の文脈では)“ヘン” な poset である．このような “ヘン” な poset を排除するため，poset の分類をいくつか定める．

定義

- $A \subseteq \mathbb{P}$ が antichain :⇔ $\forall p \neq q \in A,\ p \perp q$.
- 任意の $\mathbb{P}$ の antichain が可算であるとき，$\mathbb{P}$ は countable chain condition (ccc) を満たすと言う．
- $2 \leq k \in \omega$ とし，$Q \subseteq \mathbb{P}$ が k-linked :⇔ $\forall p_0, \ldots, p_{k-1} \in Q,\ \exists q \in \mathbb{P}, q \leq p_0, \ldots, p_{k-1}$. 任意の k に対して k-linked であるときは centered であると言う．
- κ を cardinal とし，$\mathbb{P}$ が σ-k-linked[σ-centered]:⇔ $\exists \{Q_n \subseteq \mathbb{P} : n \in \omega\}$, 各 Q_n は k-linked[centered] で $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} Q_n$.

Cohen forcing $\Rightarrow$ σ-centered $\Rightarrow$ σ-k-linked $\Rightarrow$ ccc

補題

poset $\mathbb{P}$ と $k \geq 2$ に対する次の 4 つの条件は, 強い順に並んでいる.

1. $\mathbb{P}$ は Cohen forcing $\mathbb{C}$ である.
2. $\mathbb{P}$ は σ-centered.
3. $\mathbb{P}$ は σ-k-linked.
4. $\mathbb{P}$ は ccc を満たす.

Proof.

$1 \Rightarrow 2$ $\mathbb{C}$ は可算集合である.

$2 \Rightarrow 3$ centered ならば k-linked である.

$3 \Rightarrow 4$ $\mathbb{P}$ が σ-k-linked であることの witness $\{Q_n \subseteq \mathbb{P} : n \in \omega\}$ をとる. 非可算な antichain $A \subseteq \mathbb{P}$ が存在したとして矛盾を導けばよい. A は非可算なので, (鳩ノ巣原理の無限ヴァージョンより) $\exists n \in \omega$, $\exists p \neq q \in A \cap Q_n$. Q_n は k-linked なので p と q は compatible だが, これは A が antichain であることに矛盾. $\square$

$\mathbb{C}_A$ は ccc を満たさない

これらの条件は先ほどの $\mathbb{C}_A$ の排除に成功している:

補題

$\mathbb{C}_A$ は ccc を満たさない.
ただし, $\mathbb{C}_A$ は size $\aleph_1$ の集合 A に対し
$\mathbb{C}_A := \{p : p$ は $\omega \to A$ の有限部分関数 $\}$, $p \leq q :\Leftrightarrow p \supseteq q$, $\mathbb{1} := \emptyset$
で定まる poset である.

Proof. $a \in A$ に対し $p_a := \{(0, a)\}$ とする. $a \neq b \in A$ に対し, $0 \in \mathrm{dom}(p_a) \cap \mathrm{dom}(p_b)$ かつ $p_a(0) = a \neq b = p_b(0)$ なので, p_a と p_b は incompatible である. 従って $\{p_a : a \in A\}$ は size $\aleph_1$ の antichain であるから, $\mathbb{C}_A$ は ccc を満たさない. □

Martin's Axiom

命題 $\mathrm{MA}_\varphi(\kappa)$ を定義し，それを用いて基数不変量を定義する．

定義 (Martin's Axiom)

1. poset の性質 (e.g. ccc, σ-centered) を表す φ に対し，$\mathrm{MA}_\varphi(\kappa) :\Leftrightarrow \varphi$ を満たす任意の poset $\mathbb{P}$ に対し，$\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$.
2. $\mathfrak{m}(\varphi) := \min\{\kappa : \neg\mathrm{MA}_\varphi(\kappa)\}$ とする．$\mathfrak{m} := \mathfrak{m}(\mathrm{ccc})$，$\mathfrak{m}_k := \mathfrak{m}(\sigma\text{-}k\text{-linked})$，$\mathfrak{m}_\sigma := \mathfrak{m}(\sigma\text{-centered})$,$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{m}(\mathrm{Cohen})$.

ちなみに Martin's Axiom (MA) は，$\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$ という主張である．
Cohen $\Rightarrow$ σ-centered $\Rightarrow$ σ-k-linked $\Rightarrow$ ccc と，GFEL,$\neg\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{c})$ より，次の不等式が成り立つ．

補題

$\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_k, \mathfrak{m}_\sigma, \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ は well-defined で，$\aleph_1 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}_k \leq \mathfrak{m}_\sigma \leq \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} \leq \mathfrak{c}$.

また，上の 5 つの不等式はすべて等式が証明できないことが証明されており、その意味で non-trivial な値が定義できている．

Amoeba forcing $\mathbb{A}_\varepsilon$

いくつか poset を導入して，それがどのような poset の性質 (k-Knaster, σ-cenered など) を満たし，どのようなジェネリックオブジェクトを追加するためにどのような基数不変量の不等式を与えるのかについて見ていく．

まずは Amoeba forcing と呼ばれる poset $\mathbb{A}_\varepsilon$ を導入する．
μ を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とする．

定義 (Amoeba forcing)

$\varepsilon > 0$ に対し，Amoeba forcing $\mathbb{A}_\varepsilon$ を次のように定める．
$\mathbb{A}_\varepsilon := \{p \subseteq \mathbb{R} : p$ は開集合で $\mu(p) < \varepsilon\}$, $p \leq q :\Leftrightarrow p \supseteq q$, $\mathbb{1} := \emptyset$.

Amoeba forcing $\mathbb{A}_\varepsilon$ のジェネリックオブジェクトは "与えたれた測度 0 の集合を全て含むような測度 $\leq \varepsilon$ の開集合" である．

ルベーグ測度の基本性質

Amoeba forcing の性質を見る前に，ルベーグ測度に関する基本性質を少し振り返る．
有理端点の開区間全体 $\mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ の可算開基であった．
$\mathcal{B} := \{\bigcup_{k<n} O_k : \{O_k : k < n\} \subseteq \mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}), n \in \omega\}$ とおく．
$|\mathcal{B}| \leq |\mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^{<\omega}| \leq |\omega^{<\omega}| = \aleph_0$ である．

補題

$\varepsilon > 0, U \in \mathrm{Open}(\mathbb{R}), \mu(U) < \infty$ とする．
このとき $\exists W \in \mathcal{B}, W \subseteq U$ かつ $\mu(U \setminus W) < \varepsilon$．

Proof. $\mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ は可算開基なので
$\exists \{O_n : n \in \omega\} \subseteq \mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}), U = \bigcup_{n\in\omega} O_n$ である．
$\mu(U) = \sup_{n\in\omega} \mu(\bigcup_{k<n} O_k) < \infty$ かつ各 $n \in \omega$ に対し
$\bigcup_{k<n} O_k \in \mathcal{B}$ かつ $\bigcup_{k<n} O_k \subseteq U$ なので示された． □

Amoeba forcing は σ-k-linked

Amoeba forcing は σ-k-linked である.

補題

任意の $\varepsilon > 0$ と $k \geq 2$ に対し $\mathbb{A}_\varepsilon$ は σ-k-linked である.

Proof. $n \in \omega$ と $W \in \mathcal{B}$ に対し $Q_{n,W} := \{p \in \mathbb{A}_\varepsilon :$ $W \subseteq p$ かつ $\mu(p) < \varepsilon - 2^{-n}$ かつ $\mu(p \setminus W) < k^{-1} \cdot 2^{-n}\}$ とおく. 各 $p \in \mathbb{A}_\varepsilon$ に対し $\exists n \in \omega, \mu(p) < \varepsilon - 2^{-n}$ であり, 直前の補題から $\exists W \in \mathcal{B}, W \subseteq p$ かつ $\mu(p \setminus W) < k^{-1} \cdot 2^{-n}$ である. 従って $\mathbb{A}_\varepsilon = \bigcup_{n\in\omega, W\in\mathcal{B}} Q_{n,W}$ であるから, 後は各 $Q_{n,W}$ が k-linked であることを示せばよい. $p_0, \dots, p_{k-1} \in Q_{n,W}$ に対して,
$\mu(p_0 \cup \cdots \cup p_{k-1}) = \mu((p_0 \setminus W) \cup \cdots \cup (p_{k-1} \setminus W) \cup W) <$ $(k \cdot k^{-1} \cdot 2^{-n}) + \mu(W) \leq 2^{-n} + \mu(p) < 2^{-n} + \varepsilon - 2^{-n} = \varepsilon$ なので, $p_0 \cup \cdots \cup p_{k-1} \in \mathbb{A}_\varepsilon$ だから $p_0, \dots, p_{k-1}$ は共通下界 $p_0 \cup \cdots \cup p_{k-1}$ を持つ. 従って $Q_{n,W}$ は k-linked である. □

因みに Amoeba forcing は σ-centered ではないことが知られている.

$D_N := \{p \in \mathbb{A}_\varepsilon : N \subseteq p\}$ は dense

補題

$N \in \mathcal{N}$ に対し, $D_N := \{p \in \mathbb{A}_\varepsilon : N \subseteq p\}$ は dense である.

Proof. 任意の $p \in \mathbb{A}_\varepsilon$ に対し, $\exists \delta > 0, \mu(p) < \varepsilon - \delta$ である. $N \in \mathcal{N}$ なので $\exists U \in \mathrm{Open}(\mathbb{R}), N \subseteq U$ かつ $\mu(U) < \delta$ である. $q := p \cup U$ とおくと $q \in \mathrm{Open}(\mathbb{R})$ で $\mu(q) \leq \mu(p) + \mu(U) < \varepsilon - \delta + \delta = \varepsilon$ なので, $q \in \mathbb{A}_\varepsilon$ である. $q \leq p$ かつ $q \in D_N$ なので, これで D_N が dense であることが示された. □

ちなみにこの証明において, p が N を含むように大きな q に拡大するところがまるでアメーバのようである.

$\mathfrak{m}_k \leq \mathrm{add}(\mathcal{N})$

定理

任意の $k \geq 2$ に対し $\mathfrak{m}_k \leq \mathrm{add}(\mathcal{N})$.

Proof. 任意に与えられた $\mathscr{F} \in [\mathcal{N}]^{<\mathfrak{m}_k}$ に対し $\bigcup_{N \in \mathscr{F}} N \in \mathcal{N}$ を示せばよい．それには任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し $\mu(\bigcup_{N \in \mathscr{F}} N) \leq \varepsilon$ を示せばよい．ε に関する Amoeba forcing $\mathbb{A}_\varepsilon$ を考え，$\mathscr{D} := \{D_N : N \in \mathscr{F}\}$ とおく．先ほどの補題から $\{D_N : N \in \mathscr{F}\}$-ジェネリックフィルター G が存在する．

$A_G := \bigcup_{p \in G} p$ とおく．G が $\{D_N : N \in \mathscr{F}\}$-ジェネリックフィルターであることから $\forall N \in \mathscr{F}$, $N \subseteq A_G$ なので，$\mu(A_G) \leq \varepsilon$ を示せば十分である．$x \in p \in G$ ならば $\exists O \in \mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}), x \in O \subseteq p$ でありこのとき $O \in G$ なので，$A_G = \bigcup_{p \in G \cap \mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})} p$ である．

$G \cap \mathrm{Base}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \{p_n : n \in \omega\}$ とおく．$n \in \omega$ に対し，G がフィルターであることから $p_0, \ldots, p_{n-1}$ は共通下界を持つので，特に $\bigcup_{i<n} p_i$ は $\mathbb{A}_\varepsilon$ の元 (測度 $< \varepsilon$) である．従って $\mu(A_G) = \mu(\bigcup_{n \in \omega} p_n) = \mu(\bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{i<n} p_i) = \sup_{n \in \omega} \mu(\bigcup_{i<n} p_i) \leq \varepsilon$. □

Hechler forcing $\mathbb{D}$

次に Hechler forcing と呼ばれる poset $\mathbb{D}$ を導入する.
Hechler forcing は Cohen forcing と同様に $\omega \to \omega$ の有限関数を広げていって全体関数 $\omega \to \omega$ を構成するような poset であるが，その広がり方の範囲を "コントロールする部分" が新たに追加されている (以下の定義の第 2 成分 f).

定義 (Hechler forcing)

Hechler forcing $\mathbb{D}$ を次のように定める.

- $\mathbb{D} := \{(s, f) : s \in \omega^{<\omega}, f \in \omega^\omega\}$.
- $(s, f) \leq (t, g) :\Leftrightarrow s \supseteq t$ かつ $f \geq g$ かつ $\forall n \in \mathrm{dom}(s) \setminus \mathrm{dom}(t), s(n) \geq g(n)$.
  (ただし，$f, g \in \omega^\omega$ に対し $f \leq g :\Leftrightarrow \forall n \in \omega,\ f(n) \leq g(n)$.)
- $\mathbb{1} := (\emptyset, \{(n, 0) : n \in \omega\})$.

有限近似とコントロール

ここで少し Hechler forcing のイメージを説明しておく.
Hechler forcing において s は“ジェネリックオブジェクトの有限近似” であり, s を広げていって関数 $f_G = \bigcup_{(s,f)\in G} s \colon \omega \to \omega$ を作ろうとしている. そして f が “有限近似の広げ方をコントロールする部分” である.
コントロールによってジェネリックオブジェクト f_G は “与えられた関数全てを dominate するほど急激に増大するような関数” になる.

poset の順序は $(s, f) \leq (t, g) :\Leftrightarrow s \supseteq t$ かつ $f \geq g$ かつ $\forall n \in \mathrm{dom}(s) \setminus \mathrm{dom}(t), s(n) \geq g(n)$ で定まっていた. この 3 条件は次のような対応がある.

- $s \supseteq t \longleftrightarrow s$ は t 以上に近似している
- $f \geq g \longleftrightarrow$ コントロールがより厳しくなっている
- $\forall n \in \mathrm{dom}(s) \setminus \mathrm{dom}(t), s(n) \geq g(n) \longleftrightarrow$ 新しく広がった近似の部分は, 以前のコントロールの範囲で広がっている

このイメージは後の $\mathfrak{m}_\sigma \leq \mathfrak{b}$ の証明の理解に役立つ.

Hechler forcing は σ-centered

Hechler forcing $\mathbb{D}$ の poset としての性質を見る.

補題

$s \in \omega^{<\omega}$ に対し $Q_s := \{(t, f) \in \mathbb{D} : t = s\}$ は centered である.
特に, ($\mathbb{D} = \bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} Q_s$ かつ $|\omega^{<\omega}| = \aleph_0$ なので) Hechler forcing $\mathbb{D}$ は σ-centered である.

Proof. $s \in \omega^{<\omega}$ を固定して任意に $(s, f_0), \ldots, (s, f_{k-1}) \in Q_s$ を取る. $f \in \omega^\omega$ を $n \in \omega$ に対し $f(n) := \max\{f_0(n), \ldots, f_{k-1}(n)\}$ とすることで定める. このとき $(s, f) \leq (s, f_0), \ldots, (s, f_{k-1})$ なので Q_s は centered である. □

ジェネリックオブジェクト f_G が持つ性質

補題

1. $n \in \omega$ に対し $D_n := \{(s, f) \in \mathbb{D} : n \in \mathrm{dom}(s)\}$ は dense.
2. $f \in \omega^\omega$ に対し $D_f = \{(s, g) \in \mathbb{D} : g \geq f\}$ は dense.

Proof.

1. $n \in \omega$ を固定して任意に $(s, f) \in \mathbb{D}$ を取る.
   $m > n, \max(\mathrm{dom}(s))$ を取り, $t \colon m \to \omega$ を $i \in \mathrm{dom}(s)$ に対し $t(i) := s(i)$, $i \in \mathrm{dom}(t) \setminus \mathrm{dom}(s)$ に対し $t(i) := f(i)$ とすることで定める. するとこのとき $(t, f) \leq (s, f)$ かつ $(t, f) \in D_n$ である.
2. ($\mathbb{D}$ が σ-centered である証明と同様) $f \in \omega^\omega$ を固定して任意に $(s, g) \in \mathbb{D}$ を取る. $h \in \omega^\omega$ を $n \in \omega$ に対し $h(n) := \max\{f(n), g(n)\}$ とすることで定めれば, $(s, h) \leq (s, g)$ かつ $(s, h) \in D_f$ である.

□

$\mathfrak{m}_\sigma \leq \mathfrak{b}$

これで Hechler forcing を用いて $\mathfrak{m}_\sigma \leq \mathfrak{b}$ を示す準備が整った.

定理

$\mathfrak{m}_\sigma \leq \mathfrak{b}$.

Proof. 任意に与えられた size $< \mathfrak{m}_\sigma$ の $B \subseteq \omega^\omega$ が unbounded family でないことを示せばよい.
$\mathscr{D} := \{D_n : n \in \omega\} \cup \{D_f : f \in B\}$ とおくと,
$|\mathscr{D}| \leq \max\{\aleph_0, |B|\} < \mathfrak{m}_\sigma$ より $\mathscr{D}$-ジェネリックフィルター $G \subseteq \mathbb{D}$ がとれる. $f_G := \bigcup\{t : (t, g) \in G\}$ とおく.
<u>f_G は関数である.</u>
(Cohen forcing のときと同様に) $(n, i), (n, j) \in f_G$ とすると $\exists(s, f), (s', f') \in G, (n, i) \in s$ かつ $(n, j) \in s'$ であり, G はフィルターなので $\exists(t, g) \in G$, $(t, g) \leq (s, f), (s', f')$ となるが特に $t \supseteq s, s'$ なので $(n, i), (n, j) \in t$. t は関数なので $i = j$ となる.

$\mathfrak{m}_\sigma \leq \mathfrak{b}$

f_G は全体関数 $f_G : \omega \to \omega$ である.
G が $\{D_n : n \in \omega\}$-ジェネリックフィルターであることから,
$\forall n \in \omega, \exists p \in D_n \cap G$ でありこのとき $\mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(f_G)$ である.
$\forall f \in B,\ f \leq^* f_G$
G が $\{D_f : f \in B\}$-ジェネリックフィルターであることから, 任意に $f \in B$ を取ると $\exists (s, g) \in D_f \cap G$ である.
$\forall n \in \omega \setminus \mathrm{dom}(s), f(n) \leq f_G(n)$ を示せば十分である. そのような n に対し $\exists (s', g') \in G, s'(n) = f_G(n)$ である. G はフィルターなので $\exists (t, h) \in G, (t, h) \leq (s, g), (s', g')$. $n \in \mathrm{dom}(t) \setminus \mathrm{dom}(s)$ かつ $(t, h) \leq (s, g)$ より $t(n) \geq g(n)$ である. $(s, g) \in D_f$ より $g(n) \geq f(n)$ で, $t \supseteq s'$ かつ $n \in \mathrm{dom}(s')$ より $t(n) = s(n) = f_G(n)$ なので $f(n) \leq f_G(n)$ である.
以上より $B \subseteq \omega^\omega$ は unbounded family ではない. □

poset $\mathbb{P}_{\mathscr{E}}$

最後にもう 1 つ poset を扱って $\mathfrak{m}_\sigma \leq \mathfrak{p}$ を示す.

定義

SFIP を持つ $\mathscr{E} \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ に対し, poset $\mathbb{P}_{\mathscr{E}}$ を次で定める.
ただし, $\bigcap \emptyset := \omega$ とする.

- $\mathbb{P}_{\mathscr{E}} := \{(s, A) : s \in [\omega]^{<\omega}, A \in [\mathscr{E}]^{<\aleph_0}\}$
- $(s, A) \leq (t, B) :\Leftrightarrow s \supseteq t$ かつ $A \supseteq B$ かつ $s \setminus t \subseteq \bigcap_{x \in B} x$
- $\mathbb{1} := (\emptyset, \emptyset)$

($\mathbb{P}_{\mathscr{E}}$ の名前は特にないが, “$\mathscr{E}$ で生成されるフィルターによる Mathias forcing” とほぼ等しい.)

$\mathbb{P}_{\mathscr{E}}$ のジェネリックオブジェクト $x_G := \bigcup_{(s,A) \in G} s$ は “$\mathscr{E}$ の pseudo-intersection” である. 先ほどの “有限近似とコントロール” の観点から見ると, “有限集合を広げていって無限集合を作ろうとしていて, 新しく広げるときには与えられた有限個の $\mathscr{E}$ の共通部分から選んで広げる” ようなイメージである.

poset $\mathbb{P}_{\mathscr{E}}$ の性質

poset $\mathbb{P}_{\mathscr{E}}$ の性質の性質を見る.

補題

1. $\mathbb{P}_{\mathscr{E}}$ は σ-centered である.
2. $x \in \mathscr{E}$ に対し $D_x := \{(s, A) : x \in A\}$ は dense.
3. $n \in \omega$ に対し $D_n := \{(s, A) : |s| \geq n\}$ は dense.

Proof.

1. $s \in [\omega]^{<\omega}$ に対し $Q_s := \{(t, A) : t = s\}$ とおくと Q_s は centered である.
2. 任意の (s, A) に対し $(s, A \cup \{x\}) \leq (s, A)$ である.
3. 任意に (s, A) を取る. SFIP より, $\bigcap_{x \in A} x$ は無限集合なので n 元集合 $s' \subseteq \bigcap_{x \in A} x \setminus s$ が取れる. このとき $(s \cup s', A) \leq (s, A)$ かつ $(s \cup s', A) \in D_n$ である.

□

$\mathfrak{m}_\sigma \leq \mathfrak{p}$

定理

$\mathfrak{m}_\sigma \leq \mathfrak{p}$.

Proof. SFIP を持つ $\mathscr{E} \in [[\omega]^{\aleph_0}]^{<\mathfrak{m}_\sigma}$ が pseudo-intersection を持つことを示せばよい. $\mathbb{P}_\mathscr{E}$ は σ-centered だから, $\mathscr{D} := \{D_x : x \in \mathscr{E}\} \cup \{D_n : n \in \omega\}$-ジェネリックフィルター G が存在する. $x_G := \bigcup_{(s,A)\in G} s$ とおく.

$\underline{x_G \in [\omega]^{\aleph_0}}$: G が $\{D_n : n \in \omega\}$-ジェネリックであることから $\forall n \in \omega, |x_G| \geq n$ である.

$\underline{\forall x \in \mathscr{E}, x_G \subseteq^* x}$: $x \in \mathscr{E}$ を任意にとる. G はジェネリックフィルターだから $\exists (s, A) \in D_x \cap G$ である. $x_G \setminus s \subseteq x$ を示せば十分なので $a \in x_G \setminus s$ を任意にとる. $x_G := \bigcup_{(s',A')\in G} s'$ より $\exists (s', A') \in G, a \in s$. $(s, A), (s', A') \in G$ かつ G はフィルターなので $\exists (t, B) \in G, (t, B) \leq (s, A), (s', A')$. $a \in s' \setminus s \subseteq t \setminus s$ かつ $(t, B) \leq (s, A)$ より, $a \in \bigcap_{x'\in A} x'$ だが, 特に $x \in A$ より $a \in x$.

以上より x_G は $\mathscr{E}$ の pseudo-intersection である. □

まとめの図

今までに紹介した不等式をまとめると次図のようになる．ただし新たに，$\mathfrak{p} \leq \mathfrak{m}_\sigma, \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{m}_\mathbb{C}$ を Fact として認めた．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & \mathfrak{r} \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[urrrr] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[ur] & \\
 & & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[uurrr] & & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
 & & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{m}_\mathbb{C} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[uuur] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathfrak{m} \arrow[r] & \mathfrak{m}_k \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{p} = \mathfrak{m}_\sigma \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{s} \arrow[uuul] \arrow[uur] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}
$$

おすすめの文献

基数不変量や集合論に興味を持った方々に次の 2 つの文献をすすめておきます.

- Matthew Foreman and Akihiro Kanamori, editors. *Handbook of set theory.* Springer, Dordrecht, 2010. Chapter 6. "Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum".
  $\rightarrow$ 基数不変量の話が詳しく書かれており, (最終節を除き) 強制法の知識を要しない.
- Kenneth Kunen. *Set theory,* Vol. 34 of *Studies in Logic (London).* College Publications, London, 2011.
  $\rightarrow$ 集合論の基礎から始めて強制法の基礎理論まで学ぶことができる.

ご清聴ありがとうございました.