ゲーム理論とオークション

yuchains

2023 年 9 月 17 日

はじめに

- （理論）経済学には、ミクロ経済学とマクロ経済学に分けられる。
  - ミクロ経済学：消費者・生産者といったミクロな経済主体の行動
  - マクロ経済学：物価・インフレ・失業など経済のマクロな経済変動
- 前回のすうがく徒のつどい@オンラインでは、ミクロ経済学の一分野である『一般均衡理論』について説明した。
- 今回は、ミクロ経済学の一分野である『ゲーム理論』とその応用について説明する。

数学

- ゲーム理論について話をする前に、説明で使用する数学について説明する。
- 特に説明のない集合は、ユークリッド空間の部分集合である。
- ゲーム理論では、慣例的に少々特殊な記号を用いる。
  - $A := A_1 \times \cdots \times A_n$ のとき、$A_{-i} := A_1 \times \cdots A_{i-1} \times A_{i+1} \times A_n$ を示す。
  - $(a_i^*, a_{-i}) \in A$ のとき、$(a_i^*, a_{-i}) := (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^*, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ を示す。
- その他あれば聞いてください。

対応

Definition (対応)

集合 X, Y について、任意の $x \in X$ について、Y の部分集合 $F(x) \subseteq Y$ を対応させる関数を対応といい、$F : X \twoheadrightarrow Y$ と表記する。

- 任意の $x \in X$ について、$F(x) \subseteq Y$ が一点集合のとき、対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ は関数と同一視できる。

対応の上半連続性

Definition (上半連続性)

対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ は上半連続であるとは、任意の $x \in X$ と $F(x)$ の任意の開近傍 U について、x の開近傍 V が存在して、任意の $v \in V$ について $F(v) \subseteq U$ となることをいう。

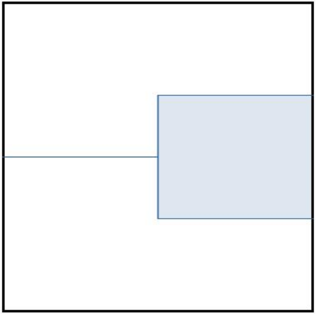
- 関数における連続性の一般化となっている。

対応の上半連続性

Example (上半連続性)

以下の対応 $F : [-5, 5] \twoheadrightarrow [-5, 5]$ は上半連続である。

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & -5 \leq x < 0 \\ [-2, 2] & 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



対応の上半連続性

Theorem (閉グラフ定理)

対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ について、以下は同値である。

1. F は閉値な上半連続対応である。
2. F のグラフ $Graph(F) := \{(x, y) \mid x \in F(y)\}$ は閉集合である。

ブラウワーの不動点定理

Theorem (ブラウワーの不動点定理)

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ を非空コンパクトな凸集合とする。関数 $f : X \to X$ が連続であるとき、f には不動点が存在する。つまり、

$$x^* = f(x^*)$$

を満たす $x^* \in X$ が存在する。

角谷の不動点定理

Theorem (角谷の不動点定理)

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ を非空コンパクトな凸集合とする。対応 $F : X \twoheadrightarrow X$ が非空値かつ凸値かつ上半連続であるとき、F には不動点が存在する。つまり、

$$x^* \in F(x^*)$$

を満たす $x^* \in X$ が存在する。

- 角谷の不動点定理は、ブラウワーの不動点定理の一般化となっている。
- 経済学における均衡の存在を示すために、不動点定理は重要となる。

【参考】自然状態と事象

- プレイヤーが「ある事象が起こっていることを知っていること」のモデルを考えたい。
- プレイヤーの集合を $N = \{1, \ldots, n\}$ とする。
- 自然状態（可能世界）の集合 Ω を考える。
- 自然状態の集合 Ω の部分集合 $E \subseteq \Omega$ を事象という。
- 自然状態 $\omega \in E$ のとき、事象 E が自然状態 ω において生起するという。

【参考】知識作用素

Definition (知識作用素)

写像 $K_i : 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ が以下の性質を満たすとき、知識作用素であるという。

1. 【分配公理】$K_i(E) \cap K_i(F) = K_i(E \cap F), \forall E, F \in 2^{\Omega}$
『事象 E が生起したことを知っている、かつ、事象 F が生起したことを知っている』ことと、『事象 E と F が生起したことを知っている』ことは同値である。
2. 【知識公理】$K_i(E) \subseteq E, \forall E \in 2^{\Omega}$
『事象 E が生起したことを知っている』ならば、『事象 E が生起している』。
3. 【正の内省公理】$K_i(E) \subseteq K_i(K_i(E)), \forall E \in 2^{\Omega}$
『事象 E が生起したことを知っている』ならば、『事象 E が知っていることを知っている』。
4. 【負の内省公理】$\Omega \setminus K_i(E) \subseteq K_i(\Omega \setminus K_i(E)), \forall E \in 2^{\Omega}$
『事象 E が生起したことを知らない』ならば、『事象 E が生起したこと知らないことを知っている』。

【参考】知識作用素

- $K_i(E)$ は、事象 E の生起を知ることができる自然状態全体の集合を示している。
- $\omega \in K_i(E)$ のとき、事象 E は自然状態 ω でプレイヤー i の知識であることを示している。
- 知識作用素は、以下の性質を満たす。
  - $K_i(\Omega) = \Omega$
  - $E \subseteq F$ ならば $K_i(E) \subseteq K_i(F)$

【参考】相互知識作用素

Definition (相互知識作用素)

写像 $M: 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ を相互知識作用素という。

$$M(E) := \bigcap_{i \in N^n} K_i(E)$$

- 任意のプレイヤー $i \in N$ が事象 E を知っているとき、事象 E がプレイヤーの集合 N の相互知識であるという。
- $\omega \in M(E)$ のとき、事象 E は自然状態 ω でプレイヤーの集合 N の相互知識であることを示している。

【参考】共有知識作用素

Definition (共有知識作用素)

写像 $M^n : 2^\Omega \to 2^\Omega$ を再帰的に定義する。

$$M^1(E) := M(E),\ M^{n+1}(E) := M(M^n(E))$$

写像 $C : 2^\Omega \to 2^\Omega$ を共有知識作用素という。

$$C(E) = \bigcap_{k=1}^{\infty} M^k(E)$$

- 任意の $k \in \mathbb{N}$、任意のプレイヤーの列 $(i_1, \dots, i_k) \in N^k$ について、i_k が事象 E を知っていることを i_{k-1} が知っていることを $\cdots$ i_1 が知っているとき、事象 E がプレイヤーの集合 N の共有知識であるという。
- $\omega \in C(E)$ のとき、事象 E は自然状態 ω でプレイヤーの集合 N の共有知識であることを示している。

ゲーム理論

- 複数のプレイヤー（意思決定者）が相互に影響し合う状況を扱う数理モデル。
- 経済学のみならず、政治学、生物学、社会学など様々な分野で応用されている。
- ゲーム理論は、非協力ゲーム理論・協力ゲーム理論に大別されるが、今回は非協力ゲーム理論について扱う。
- 非協力ゲーム理論では、各プレイヤーがそれぞれの独立して戦略を決定する。
- 全てのプレーヤーが選択した戦略に応じて、ゲームの結果が定まり、各プレーヤーは結果に応じた利得を得る。

標準形ゲーム

Definition (標準形ゲーム)

標準形ゲームは、以下の組で定義される。

$$\left(N, (S_i)_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\right)$$

ここで、

- $N = \{1, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合（有限集合）
- S_i：プレイヤー $i \in N$ の戦略の集合
- $u_i : S \to \mathbb{R}$：プレイヤー $i \in N$ の利得関数
  （$S = S_1 \times \cdots \times S_n$）

である。

- 標準形ゲームは、各プレイヤーがゲームの要素全てを把握できている『完備情報ゲーム』である。
- ゲームの要素全てが『共有知識』であるという仮定を置く。

共有知識

- プレイヤーは、他のプレイヤーの戦略を予想し、その予想に対して最適な戦略を選択すると考えられる。
- プレイヤーが戦略を予想する他のプレイヤーもまた、他のプレイヤーの戦略を予想し、その予想に対して最適な戦略を選択すると考えられる。
- このような予想ができるためには、
    - 全てのプレイヤーがゲームの要素全てを知っているばかりでなく、
    - そのような事実自体を全てのプレイヤーが知っており、
    - そのような事実自体をまた、全てのプレイヤーが知っており、
    - $\cdots$

  が成り立っている必要がある。
- そのため、ゲームの要素全てが『共有知識』であるという仮定を置いている。

囚人のジレンマ

- 標準形ゲームの有名な例として、囚人のジレンマがある。
- 囚人 2 人が検察の取り調べを受けている。
- 囚人の自白を引き出すため、検察は囚人に次のような司法取引をもちかける。
  - 2 人とも自白したら、それぞれ懲役 5 年となる。
  - 2 人とも黙秘したら、証拠不十分のためそれぞれ懲役 2 年となる。
  - もし片方だけが自白したら、自白したものは釈放、黙秘してたものは懲役 10 年となる。
- この状況をまとめると、以下の利得表となる。

1\2	自白	黙秘
自白	$(-5,-5)$	$(0,-10)$
黙秘	$(-10,0)$	$(-2,-2)$

囚人のジレンマ

1\2	自白	黙秘
自白	$(-5^*, -5^*)$	$(0^*, -10)$
黙秘	$(-10, 0^*)$	$(-2, -2)$

- プレイヤー 2 が自白する場合も黙秘する場合も、プレイヤー 1 は自白を選択する方が利得が高い。
- プレイヤー 1 が自白する場合も黙秘する場合も、プレイヤー 2 は自白を選択する方が利得が高い。
- プレイヤー 1 もプレイヤー 2 も、『自白』は、相手がどちらを選択した場合でも最も高い利得を得られる『支配戦略』となっている。
- プレイヤー 1 もプレイヤー 2 も、『自白』を選択すると考えられるため、(自白, 自白) が実現すると考えられる。

支配戦略均衡

Definition (支配戦略)

プレイヤー $i \in N$ の戦略 $s_i^* \in S$ が支配戦略であるとは、任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ について、

$$s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}\right)$$

を満たすことである。

$(s_i^*, s_{-i}) \in S$ は、$(s_1, \ldots, s_n) \in S$ の第 i 成分 s_i を s_i^* に置き換えたものである。（以降、同様の記法を用いる。）

Definition (支配戦略均衡)

戦略の組 $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ が支配戦略均衡であるとは、任意の $i \in N$ について、$s_i^* \in S_i$ が支配戦略であることである。

支配戦略均衡

1\2	自白	黙秘
自白	$(-5^*, -5^*)$	$(0^*, -10)$
黙秘	$(-10, 0^*)$	$(-2, -2)$

- 囚人のジレンマでは、(自白, 自白) が支配戦略均衡となる。
- しかし、プレイヤー 1 もプレイヤー 2 も、(黙秘, 黙秘) の利得は、(自白, 自白) の利得より大きくなる。
- 支配戦略均衡を考えるのには、『共有知識』の仮定は不要で『相互知識』であればよい。

パレート効率性

Definition (パレート効率性)

戦略の組 $s^* \in S$ がパレート効率的であるとは、任意の $i \in N$ について、

$$u_i(s) > u_i(s^*)$$

を満たす戦略の組 $s \in S$ が存在しないことである。

- 囚人のジレンマでは、支配戦略均衡 (自白, 自白) はパレート効率的でない。
- プレイヤーそれぞれが最適な戦略をとった場合でも、社会全体としてパレート効率的な結果が実現するとは限らない。

最適反応

$1\backslash 2$	X	Y	Z
A	$(1,3)$	$(4^*,5)$	$(3,7^*)$
B	$(2^*,4)$	$(3,5^*)$	$(6^*,3)$
C	$(2^*,3^*)$	$(2,1)$	$(5^*,1)$

- 上のゲームには、プレイヤー 1、2 のどちらにも支配戦略が存在しない。
- このゲームではどのような結果が実現するか。
- ゲーム理論では、ナッシュ均衡という均衡概念を考える。

最適反応

Definition (最適反応)

プレイヤー $i \in N$ の戦略 $s_i^* \in S_i$ が、戦略の組 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対する最適反応であるとは、

$$s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}\right)$$

を満たすことである。また、戦略の組 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対し、プレイヤー $i \in N$ の全ての最適反応の集合を定める対応 $BR_i : S_{-i} \twoheadrightarrow S_i$ を最適反応対応という。

ナッシュ均衡

Definition (ナッシュ均衡)

戦略の組 $s^* \in S$ がナッシュ均衡であるとは、任意の $i \in N$ について、

$$s_i^* \in BR_i\left(s_{-i}^*\right)$$

を満たすことである。

- 任意の支配戦略均衡はナッシュ均衡である。

ナッシュ均衡

1\2	X	Y	Z
A	$(1,3)$	$(4^*,5)$	$(3,7^*)$
B	$(2^*,4)$	$(3,5^*)$	$(6^*,3)$
C	$(2^*,3^*)$	$(2,1)$	$(5,1)$

- 上のゲームでは、(C,X) がナッシュ均衡である。
- ナッシュ均衡では、全てのプレイヤーが互いに最適反応をとっているため、ナッシュ均衡から逸脱する誘因はない。
- 一方、ナッシュ均衡ではない状態は、別の戦略を選ぶのが最適となるプレイヤーが存在する。
- その意味でナッシュ均衡は均衡状態であり、各プレイヤーが合理的に行動する場合にはナッシュ均衡が実現されると考えられる。

両性の戦い

- 男（プレイヤー 1）と女（プレイヤー 2）が行き先としてボクシングとバレエの選択肢を持っている。
- 男はバレエよりボクシングを好み、女はボクシングよりバレエを好む。
- 男女ともに、別々の行き先に行くより同じ行き先に行くことを好む。
- この状況をまとめると、以下の利得表となる。

1\2	ボクシング	バレエ
ボクシング	$(2^*, 1^*)$	$(-1, -1)$
バレエ	$(-1, -1)$	$(1^*, 2^*)$

- 上のゲームでは、(ボクシング, ボクシング) , (バレエ, バレエ) がナッシュ均衡である。
- ナッシュ均衡は、一般にただ一つであるとは限らない。

じゃんけんグリコゲーム

1\2	グー	チョキ	パー
グー	$(0,0)$	$(3^*,-3)$	$(-6,6^*)$
チョキ	$(-3,3^*)$	$(0,0)$	$(3^*,-3)$
パー	$(6^*,-6)$	$(-3,3^*)$	$(0,0)$

- 上のゲームには、ナッシュ均衡が存在しない。
- しかし、(グー, チョキ, パー) をそれぞれ (30%, 30%, 40%) の確率で出すといった『混合戦略』までを考えることで、ナッシュ均衡が存在する。

混合拡大

Definition (混合拡大)

有限戦略標準形ゲーム $\left(N, (S_i)_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}\right)$ の混合拡大は、以下の組で定義される。

$$\left(N, (Q_i)_{i \in N}, \{EU_i\}_{i \in N}\right)$$

ここで、

- $N = \{1, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合（有限集合）
- $Q_i = \left\{q_i : S_i \to [0, 1] \mid \sum_{s_i \in S_i} q(s_i) = 1,\ q(s_i) \geq 0\, \forall s_i \in S_i\right\}$
  ：プレイヤー $i \in N$ の混合戦略の集合（S_i上の確率分布）
- $EU_i : Q \to \mathbb{R}$：プレイヤー $i \in N$ の期待利得関数
  （$Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$）
  $$EU_i(q) = \sum_{s \in S} u_i(s) \prod_{j \in N} q_j(s_j)$$

である。

混合戦略ナッシュ均衡

1\2	グー	チョキ	パー
グー	$(0,0)$	$(3^*,-3)$	$(-6,6^*)$
チョキ	$(-3,3^*)$	$(0,0)$	$(6^*,-6)$
パー	$(6^*,-6)$	$(-6,6^*)$	$(0,0)$

- じゃんけんグリコゲームでは、純粋戦略の範囲ではナッシュ均衡が存在しなかった。
- 混合戦略の範囲までを考えると、$\{(40\%,40\%,20\%),(40\%,40\%,20\%)\}$ の確率で出すという混合戦略ナッシュ均衡が存在する。
- 実は、有限戦略標準形ゲームには、必ず混合戦略ナッシュ均衡が存在する。

混合戦略ナッシュ均衡の存在

Theorem (混合戦略ナッシュ均衡の存在)

混合拡大した有限戦略標準形ゲーム $\left(N, (Q_i)_{i \in N}, \{EU_i\}_{i \in N}\right)$ には、ナッシュ均衡が存在する。

【証明】

混合戦略の集合 Q_i は $|S_i| - 1$ 次元単体であるため、コンパクトな凸集合である。

期待効用関数 EU_i は連続で、q_i について線形な関数である。よって、最適反応の集合 $BR_i(q_{-i})$ は非空な凸集合なので、

$$\bar{BR}(q) := BR_1(q_{-1}) \times \cdots \times BR_n(q_{-n})$$

なる対応 $BR : Q \twoheadrightarrow Q$ は非空値かつ凸値となる。

混合戦略ナッシュ均衡の存在

【証明（続き）】
Q 上の点列 $\{q^k\},\{\bar{q}^k\}$ が

$$\bar{q}^k \in BR\left(q^k\right), \forall k \in \mathbb{N}$$
$$q^k \to q^\infty, \bar{q}^k \to \bar{q}^\infty, (k \to \infty)$$

を満たすとする。このとき、BR_i は最適反応対応であるから、任意の $i \in N$、任意の $\hat{q}_i \in Q_i$ について、

$$U_i\left(\bar{q}_i^k, q_{-i}^k\right) \geq U_i\left(\hat{q}_i, q_{-i}^k\right), \forall k \in \mathbb{N}$$

である。期待利得関数 U_i の連続性より、$k \to \infty$ とすることで、

$$U_i\left(\bar{q}_i^\infty, q_{-i}^\infty\right) \geq U_i\left(\hat{q}_i, q_{-i}^\infty\right)$$

つまり、$\bar{q}^\infty \in BR(q^\infty)$ なので、対応 BR のグラフは閉集合である。

混合戦略ナッシュ均衡の存在

【証明（続き）】
閉グラフ定理より BR は上半連続対応である。角谷の不動点定理より、$q^* \in BR(q^*)$ を満たす混合戦略の組 $q^* \in Q$ が存在するが、これが混合戦略ナッシュ均衡である。

寡占市場

- ゲーム理論の応用例として、寡占市場のモデルである、『クールノーの数量競争』を紹介する。
- 『第 3 回すうがく徒のつどい@オンライン』では、完全競争市場のモデルを紹介した。
- 完全競争市場では、十分に多数の消費者・生産者が存在するため、各消費者・生産者の行動が財の価格に影響を及ぼすことはない。
- 寡占市場では、財が少数の生産者により供給されるため、生産者の行動が財の価格に与える影響が大きい。
- そのため、生産者は価格への影響を考慮して財の生産を行う。

クールノーの数量競争

- n 個（少数）の企業（生産者）が同質な財を市場に供給している状況を考える。
- 企業 $i \in \{1, \ldots, n\}$ による生産量（供給量）を q_i とする。
- 財の価格は、以下の逆需要関数 $p : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+$ により決まるとする。
  - $p(q_1, \ldots, q_n) = a - b\sum_i q_i$ $a, b > 0, a < c$
- 企業 $i \in N$ の財の生産にかかる費用は、以下の費用関数 $C_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ により決まるとする。
  - $C_i(q_i) = cq_i, \ c > 0$
- 企業 $i \in N$ の利潤関数 $\pi_i : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+$ は以下となる。
  - $\pi_i(q_1, \ldots, q_n) = p(q_1, \ldots, q_n)q_i - cq_i$
- 企業は、利潤を最大化するように供給量を独立して決定する。
- このとき、財の生産量と価格はどのようになるか。

独占市場（1 企業）の場合を考える。
財の価格は $p(q_1) = a - bq_1$ なので、企業 1 の利潤 π_1 は、

$$
\begin{aligned}
\pi_1(q_1) &= p(q_1)\,q_1 - cq_1 \\
&= (a - bq_1)\,q_1 - cq_1 \\
&= -bq_1^2 + (a - c)\,q_1
\end{aligned}
$$

となる。よって、企業 1 の利潤を最大化する生産量 q_1^* と、そのときの財の価格 p^* は、

$$
\begin{aligned}
q_1^* &= \frac{a - c}{2b} \\
p^* &= \frac{a + c}{2}
\end{aligned}
$$

となる。

クールノーの数量競争：寡占市場（2企業）

寡占市場（2企業）の場合を考える。
財の価格は $p(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2)$ なので、企業 $i \in \{1, 2\}$ の利潤は、

$$\begin{aligned} \pi_i(q_1, q_2) &= p(q_1, q_2)\, q_i - c q_i \\ &= (a - b(q_1 + q_2))\, q_i - c q_i \\ &= -b q_i^2 + (a - c - b q_2)\, q_i \end{aligned}$$

となる。よって、企業 $i \in \{1, 2\}$ の利潤 π_i を最大化する生産量 q_i^* は、

$$\begin{aligned} q_1^* &= -\frac{1}{2} q_2 + \frac{1-c}{2b} \\ q_2^* &= -\frac{1}{2} q_1 + \frac{1-c}{2b} \end{aligned}$$

となる。ここで、企業 $i \in \{1, 2\}$ の生産量を戦略ととらえると、上記は最適反応となっている。

クールノーの数量競争：寡占市場（2 企業）

企業 $i \in \{1,2\}$ がそれぞれ合理的であるとすると、他の企業の生産量を予想して利潤が最大になるように生産量を決定すると考えられる。他の企業も合理的に行動すると考えられるときには、連立方程式を解くことで企業 $i \in \{1,2\}$ の生産量 q_i^* が求められる。
連立方程式を解くと、

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}$$

となる。生産量の組 (q_1^*, q_2^*) を『クールノー＝ナッシュ均衡』という。
このときの財の価格 p^* は、

$$p^* = \frac{a+2c}{3}$$

となる。

クールノーの数量競争：寡占市場（n 企業）

n 企業の場合を考える。
2 企業の場合と同様に考えると、企業 $i \in \{1, \dots, n\}$ の利潤 π_i を最大化する生産量 q_i^* は、

$$q_1^* = \cdots = q_n^* = \frac{a - c}{(n+1)\,b}$$

財の価格 p^* は、

$$p^* = \frac{a + nc}{n+1}$$

となる。ここで、$n = 1$ のときは独占市場の結果と一致している。

クールノーの数量競争：効率性の分析

	価格 p^*	生産量 q_i^*
寡占市場（クールノー＝ナッシュ均衡）	$\frac{a+nc}{n+1}$	$\frac{(a-c)}{(n+1)b}$

寡占市場における、企業 $i \in \{1, \ldots, n\}$ の利潤 π_i^* は、

$$\begin{aligned} \pi_i^* &= p^* q_i^* - c q_i^* \\ &= \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} \end{aligned}$$

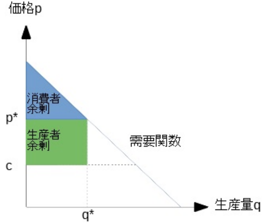
となる。
一方、全ての企業で拘束力のあるカルテルが結べるとすると、独占企業として振舞った後 $n \geq 2$ 企業間で利潤を分配した場合の利潤 π_i^* は、

$$\begin{aligned} \pi_i^* &= p^* q_i^* - c q_i^* \\ &= \frac{(a-c)^2}{4nb} > \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} \end{aligned}$$

となる。したがって、寡占市場における利潤はパレート効率的な結果とはならない。各企業には、カルテルを結ぶ誘因（インセンティブ）がある。

クールノーの数量競争：余剰分析

寡占が社会にとって望ましいか考えるために、『余剰』という概念を考える。



- 消費者余剰：消費者が財を購入する際に、支払っても良い金額から実際に支払った金額の差分
- 生産者余剰：財の販売により受取った金額と財の生産に要した費用の差分
- 社会的余剰：消費者余剰と生産者余剰の合計

クールノーの数量競争：余剰分析

完全競争市場と寡占市場を比較すると、以下の表のようになる。

	均衡概念	価格	総生産量
完全競争市場	ワルラス均衡	c	$\frac{a-c}{b}$
寡占市場	クールノー＝ナッシュ均衡	$\frac{a+nc}{n+1}$	$\frac{n(a-c)}{(n+1)b}$

	消費者余剰	生産者余剰	社会的余剰
完全競争市場	$\frac{(a-c)^2}{2b}$	0	$\frac{(a-c)^2}{2b}$
寡占市場	$\frac{n^2(a-c)^2}{2(n+1)^2b}$	$\frac{n(a-c)^2}{(n+1)^2b}$	$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{(a-c)^2}{2b}$

- 寡占市場の結果について、$n\to\infty$ を考えると、それぞれ完全競争市場の結果と一致する。
- 寡占市場では、完全競争市場の場合に対して、

$$\frac{(a-c)^2}{2(n+1)^2 b}$$

の社会的損失が生じるため、社会的に望ましいとは言えない。

不完備情報ゲーム

- 標準形ゲームは、各プレイヤーがゲームの要素全てを把握できている『完備情報ゲーム』である。
- 各プレイヤーがゲームの要素全てを把握できているとは限らないゲームを『不完備情報ゲーム』という。
- 以下では、『不完備情報ゲーム』の特別なクラスである『ベイジアンゲーム』について扱う。
- ベイジアンゲームでは、プレイヤーが保有するゲームに関する情報のうち、あるプレイヤーだけが知っている情報を示す『タイプ（私的情報）』を考える。
- プレイヤーは、他のプレイヤーのタイプを知ることはできないが、その分布に対する共有信念は形成されているとする。

ベイジアンゲーム

Definition (ベイジアンゲーム)

ベイジアンゲームは、以下の組で定義される。

$$\left(N, (M_i)_{i \in N}, (\Theta_i)_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}, p\right)$$

ここで、

- $N = \{1, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合（有限集合）
- M_i：プレイヤー $i \in N$ の行動の集合
- Θ_i：プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合
- $u_i : M \times \Theta_i \to \mathbb{R}$：プレイヤー $i \in N$ の利得関数
  （$M = M_1 \times \cdots \times M_n$）
- $p : \Theta \to [0, 1]$：プレイヤーの共有事前信念（Θ 上の確率分布）

である。

両性の戦い

- 両性の戦いゲームにおいて、相手がボクシングが好き（$\theta_{*,1}$）か、バレエ（$\theta_{*,2}$）が好きか分からないとする。

		$\theta_{2,1}$		$\theta_{2,2}$	
	1\2	ボクシング	バレエ	ボクシング	バレエ
$\theta_{1,1}$	ボクシング	$(2,2)$	$(-1,-1)$	$(2,1)$	$(-1,-1)$
	バレエ	$(-1,-1)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(1,2)$
$\theta_{1,2}$	ボクシング	$(1,2)$	$(-1,-1)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
	バレエ	$(-1,-1)$	$(2,1)$	$(-1,-1)$	$(2,2)$

- 共有事前信念 p は以下のように与えられるとする。

p	$\theta_{2,1}$	$\theta_{2,2}$
$\theta_{1,1}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$
$\theta_{1,2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$

両性の戦い

- 各プレイヤーは自分のタイプを知っているが相手のタイプを知ることができない。
- 例えば、プレイヤー 1 は自分のタイプが $\theta_{1,1}$ であると知っているとする。
- プレイヤー 1 は、プレイヤー 2 のタイプが $\theta_{2,1}$、$\theta_{2,2}$ のどちらであるか知らないが、プレイヤー 2 のタイプについての信念を持っている。
- プレイヤー 1 の、プレイヤー 2 のタイプについての信念は以下のように条件付確率で与えられる。

$p(\cdot \mid \theta_{1,1})$	$\theta_{2,1}$	$\theta_{2,2}$
$\theta_{1,1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

- プレイヤー 1 は、この信念をもとに自分の期待利得を最大化するように行動すると考えられる。（ベイジアン仮説）

両性の戦い

- ベイジアンゲームでは、戦略をメタ的な視点で考える。
- 両性の戦いゲームにおいて、以下がプレイヤー 1 戦略の 1 つとなる。
  - タイプが $\theta_{1,1}$ のときボクシングを選択、タイプが $\theta_{1,2}$ のときバレエを選択
- つまり、戦略の集合 $S_i = M_i^{\Theta_i}$(Θ_iから M_i への写像全体の集合) とする。
- プレイヤー i の期待利得関数 $EU_i : S \times \Theta_i \to \mathbb{R}$ は以下で表せる。

$$EU_i\left(s, \theta_i\right) = \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[u_i\left(s_i\left(\theta_i\right), s_{-i}\left(\theta_{-i}\right), \theta_i\right)\right]$$

支配戦略均衡

Definition (支配戦略)

プレイヤー $i \in N$ の戦略 $s_i^* \in S$ が支配戦略であるとは、任意の $m_{-i} \in M_{-i}$、任意の $\theta_i \in \Theta_i$ について、

$$s_i^*(\theta_i) \in \arg\max_{m_i \in M_i} u_i(m_i, m_{-i}, \theta_i)$$

を満たすことである。

Definition (支配戦略均衡)

戦略の組 $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ が支配戦略均衡であるとは、任意の $i \in N$ について、$s_i^* \in S_i$ が支配戦略であることである。

最適反応

Definition (最適反応)

プレイヤー $i \in N$ の戦略 $s_i^* \in S_i$ が戦略の組 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対する最適反応であるとは、任意の $\theta_i \in \Theta_i$ について、

$$s_i^*(\theta_i) \in \arg\max_{m_i \in M_i} \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[u_i\left(\left(m_i, s_{-i}(\theta_{-i})\right), \theta_i\right) \mid \theta_i\right]$$

を満たすことである。また、戦略の組 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対し、プレイヤー $i \in N$ の全ての最適反応の集合を定める対応 $BR_i : S_{-i} \twoheadrightarrow S_i$ を最適反応対応という。

ベイジアンナッシュ均衡

Definition (ベイジアンナッシュ均衡)

戦略の組 $s^* \in S$ がベイジアンナッシュ均衡であるとは、任意の $i \in N$ について、

$$s_i^* \in BR_i\left(s_{-i}^*\right)$$

を満たすことである。

両性の戦い

- 両性の戦いの期待利得とベイジアンナッシュ均衡は以下のようになる。
- 支配戦略均衡は存在しない。

	ボ, ボ	ボ, バ	バ, ボ	バ, バ
ボ, ボ	$\left(\frac{28}{16}^*, \frac{20}{16}^*\right)$	$\left(-\frac{5}{16}, -\frac{4}{16}\right)$	$\left(\frac{17}{16}, \frac{8}{16}^*\right)$	$\left(-\frac{16}{16}, -\frac{16}{16}\right)$
ボ, バ	$\left(\frac{20}{16}^*, \frac{11}{16}\right)$	$\left(\frac{2}{16}, \frac{2}{16}\right)$	$\left(\frac{14}{16}, \frac{4}{16}\right)$	$\left(-\frac{4}{16}, -\frac{5}{16}\right)$
バ, ボ	$\left(-\frac{8}{16}, -\frac{7}{16}\right)$	$\left(\frac{4}{16}, \frac{14}{16}\right)$	$\left(-\frac{4}{16}, -\frac{4}{16}\right)$	$\left(\frac{8}{16}^*, \frac{17}{16}\right)$
バ, バ	$\left(-\frac{16}{16}, -\frac{16}{16}\right)$	$\left(\frac{11}{16}, \frac{20}{16}^*\right)$	$\left(-\frac{7}{16}, -\frac{8}{16}\right)$	$\left(\frac{20}{16}^*, \frac{28}{16}^*\right)$

メカニズムデザイン（オークション）

- 今までは、ゲームが与えられたときに、各プレーヤーがどのような結果が実現するかを考えた。
- 逆に、何か実現したい目標があるとき、ゲームをうまく設計すれば望んだ結果が実現できるのではないか？
- メカニズムデザイン（制度設計）では、このような問題を取り扱う。
- メカニズムデザインの考え方は、現実の様々なところで利用されている。
  - オークション（周波数オークション、広告枠の売買、ヤフオク）：2020 年ノーベル経済学賞（ポール・ミルグロム・ロバート・ウィルソン）
  - マッチング（学校選択制、人財配置）
  - 課徴金減免制度（リニエンシー制度）：関与したカルテルや入札談合について自主的に報告した場合に課徴金が減免される制度
- 以下では、ベイジアンゲームにおけるメカニズムデザイン（その後、オークション）に絞って話を進める。

ベイジアンゲームフォーム

Definition（ベイジアンゲームフォーム）

ベイジアンゲームフォームは、以下の組で定義される。

$$\left(N, O, (\Theta_i)_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}, p\right)$$

ここで、

- $N = \{1, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合（有限集合）
- O：帰結の集合
- Θ_i：プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合
- $u_i : O \times \Theta_i \to \mathbb{R}$：プレイヤー $i \in N$ の利得関数
- $p : \Theta \to [0, 1]$：プレイヤーの共有事前信念（Θ 上の確率分布）

である。

（間接）メカニズム

Definition (（間接）メカニズム)

（間接）メカニズムは、以下の組で定義される。

$$((M_i)_{i \in N}, g)$$

ここで、

- M_i：プレイヤー $i \in N$ のメッセージ（行動）の集合
- $g : M \to O$：帰結関数（メッセージに対して帰結を割り当てる関数）

である。

メカニズムデザインの状況設定

- メカニズムの設計者は、プレイヤーのタイプの組に対し、望ましい帰結を割り当てる社会的選択関数 $c : \Theta \to O$ を持っているとする。
- メカニズムの設計者は、望ましい帰結を実現できるように、各プレイヤーに報告させるメッセージの集合 $(M_i)_{i \in N}$ と、メッセージに基づきどのような帰結を割り当てるかを定める帰結関数 $g : M \to O$ を設計する。
- メカニズム $\left((M_i)_{i \in N}, g\right)$ により、行動の集合を $(M_i)_{i \in N}$、効用関数を $u_i(g(\cdot), \cdot) : M \times \Theta_i \to \mathbb{R}$ とするベイジアンゲームが定まる。
- プレイヤーが合理的に行動する場合には、ベイジアンゲームの均衡（支配戦略均衡、ベイジアンナッシュ均衡など）が実現される。

遂行可能性

Definition (遂行可能性)

メカニズム $\left((M_i)_{i\in N}, g\right)$ における支配戦略均衡/ベイズナッシュ均衡の集合を定める対応を $S:\Theta \twoheadrightarrow M$ とする。メカニズム $\left((M_i)_{i\in N}, g\right)$ が社会的選択関数 $c:\Theta\to O$ を支配戦略遂行/ベイジアンナッシュ遂行するとは、任意の $\theta\in\Theta$ について、

$$\{c(\theta)\} = g(S(\theta))$$

を満たすことである。

直接メカニズム

- メカニズムのメッセージの集合 M とタイプの集合 Θ が一致するとき（$M = \Theta$）、直接メカニズムという。
- 直接メカニズムでは、各プレイヤーが自分の本当のタイプを言ってくれるならば、$g = c$ とすることで設計者の目的を達成できる。
- そのため、誘因両立性（インセンティブ・コンパティビリティ）という概念が重要となる。

誘因両立性

Definition (誘因両立性)

直接メカニズム $((\Theta_i)_{i \in N}, g)$ が支配戦略/ベイジアンナッシュ誘因両立的であるとは、正直戦略の組 $(id_1, \ldots, id_n) \in \Theta^\Theta$ が支配戦略均衡/ベイジアンナッシュ均衡であることである。ここで、id_i は恒等写像である。

表明原理

Theorem (表明原理)

メカニズム $((M_i)_{i\in N}, g)$ が社会的選択関数 $c:\Theta\to O$ を支配戦略遂行/ベイジアンナッシュ遂行するとする。このとき、直接メカニズム $((\Theta_i)_{i\in N}, c)$ は支配戦略/ベイジアンナッシュ誘因両立的である。

【証明】
メカニズム $((M_i)_{i\in N}, g)$ の支配戦略均衡/ベイジアンナッシュ均衡 $s^*\in S$ をとる。このとき、メカニズム $((\Theta_i)_{i\in N}, g(s^*(\cdot)))$ を考えると $(id_1,\dots,id_n)\in\Theta^\Theta$ は支配戦略均衡/ベイジアンナッシュ均衡である。
また、メカニズム $((M_i)_{i\in N}, g)$ が社会的選択関数 $c:\Theta\to O$ を支配戦略遂行/ベイジアンナッシュ遂行するため、任意の $\theta\in\Theta$ について、
$c(\theta)=g(s^*(\theta))$ である。
以上より、直接メカニズム $((\Theta_i)_{i\in N}, c)$ は支配戦略/ベイジアンナッシュ誘因両立的である。

準線形環境

- 表明原理より、誘因両立的な直接メカニズムに話を絞っても一般性を失わない。
- 以下では、準線形環境の直接メカニズムに話を絞る。
- 準線形環境では、以下が成り立つとする。
  - 帰結 $O = A \times \mathbb{R}^n$
    $a \in A$ は配分（有限集合）、$t \in \mathbb{R}^n$ は金銭移転
  - 社会的選択関数（帰結関数）$g = (a, t)$
    $a : \Theta \to A$（配分関数）、$t : \Theta \to \mathbb{R}^n$（金銭移転関数）
  - 利得関数 $u_i(o, \theta_i) = v_i(a, \theta_i) - t_i$（リスク中立な準線形関数）
    $v_i : A \times \Theta_i \to \mathbb{R}$（評価関数）

VCG メカニズム

Definition (VCG メカニズム)

社会的選択関数が任意の $\theta \in \Theta$ について以下を満たすとき、VCG メカニズムという。

$$a(\theta) \in \arg\max_{\hat{a} \in A} \sum_{i \in N} v_i(\hat{a}, \theta_i)$$

$$t_i(\theta) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a(\theta_{-i})) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a(\theta))$$

- $a(\theta)$ についての条件を満たすとき、社会的選択関数は効率的であるという。

VCG メカニズムの性質

Theorem (VCG メカニズムの支配戦略誘因両立性)

VCG メカニズムは、支配戦略誘因両立的である。

【証明】

プレイヤー $i \in N$ の真のタイプを θ_i^* とする。このとき、任意の $\theta \in \Theta$ について、

$$
\begin{aligned}
& u_i\left(a\left(\theta_i^*, \theta_{-i}\right), t\left(\theta_i^*, \theta_{-i}\right), \theta_i^*\right) - u_i\left(a\left(\theta_i, \theta_{-i}\right), t\left(\theta_i, \theta_{-i}\right), \theta_i^*\right) \\
= & \sum_{j \in N} v_j\left(a\left(\theta_i^*, \theta_{-i}\right), \theta_i^*\right) - \sum_{j \in N} v_j\left(a\left(\theta\right), \theta_i^*\right) \\
\geq & \ 0
\end{aligned}
$$

なので、支配戦略誘因両立的である。

オークション環境

- 例として、単一財の封印入札オークションを考える。
- 封印入札オークションでは、全員が入札額を表明する。
- 表明した入札額が最も高いプレイヤーが代金を支払い、財を落札する。
- オークション環境では、以下が成り立つとする。
  - 帰結 $A = \left\{ a \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i \in N} a_i = 1 \right\}$
    $a_i = 1$ のプレイヤーに財を割り当てる
  - タイプ $\Theta_i = [0,1]$
    $\theta_i \in \Theta_i$（財の評価額）
  - 評価関数 $v_i(a, \theta_i) = a_i \theta_i$
  - 金銭移転関数 $t_i(0, \theta_{-i}) = 0, \forall i \in N, \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}$（非課性）
  - 共有事前信念 $p(\theta) = \prod_{i \in N} p_i(\theta_i)$（分布独立性）
  - 共有事前信念 $p_1 = \cdots = p_n$（分布対称性）

ファーストプライスオークション

Definition (ファーストプライスオークション)

社会的選択関数がファーストプライスオークションであるとは、ある $j \in \arg\max_{\hat{i} \in N} \theta_{\hat{i}}$ が存在して、

$$a_i(\theta) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$t_i(\theta) = \begin{cases} \theta_j & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

を満たすことである。

- ファーストプライスオークションでは、最も高い入札額のプレイヤー $j \in N$ が、自分の入札額を支払う。

セカンドプライスオークション

Definition (セカンドプライスオークション)

社会的選択関数がセカンドプライスオークションであるとは、ある $j \in \arg\max_{\hat{i} \in N} \theta_{\hat{i}}$ が存在して、

$$a_i(\theta) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$t_i(\theta) = \begin{cases} \max_{\hat{i} \in N \setminus \{j\}} \theta_{\hat{i}} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

を満たすことである。

- セカンドプライスオークションでは、最も高い入札額のプレイヤー $j \in N$ が、二番目に高い入札額を支払う。

セカンドプライスオークションの性質

Theorem (セカンドプライスオークションの性質)

セカンドプライスオークションは、支配戦略誘因両立的である。

【証明】

セカンドプライスオークションは、VCG メカニズムの特殊ケースである。

オークション方式の比較

- セカンドプライスオークションは、全てのプレイヤーが正直に自分の評価額を入札することが支配戦略均衡である。
- 一方、ファーストプライスオークションでは、自分の評価額に対し、入札額を過少表明する誘因が生じる。
- 例えば、共有事前信念が一様分布の場合には、

$$s_i^*(\theta_i) = \frac{n-1}{n}\theta_i, \forall i \in N$$

を満たす $(s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ がベイジアンナッシュ均衡である。
- 誘因両立性の観点からすると、ファーストプライスオークションよりもセカンドプライスオークションが有利といえる。
- そのため、セカンドプライスオークションは、現実の様々なところで利用されている。

【補足】収入同値定理

- 実は連続性などの弱い仮定の下で、以下が成り立つ。

Theorem (収入/利得/支払同値定理)

セカンドプライスオークションと配分関数 $a : \Theta \to A$ が等しいメカニズムについて、ベイジアンナッシュ均衡で実現される設計者の期待収入/プレイヤーの期待利得/期待支払額は、セカンドプライスオークションと等しい。

- 入札額が最も高いプレイヤーが勝者となるオークション形式を採用する限り、セカンドプライスオークションより収入を増やすことができない。

まとめ

- ゲーム理論の基礎について説明した。
  - 支配戦略均衡・ナッシュ均衡・ベイジアンナッシュ均衡
  - 混合戦略・ナッシュ均衡の存在
  - クールノーの数量競争
- メカニズムデザイン（オークション）の基礎について説明した。
  - ゲームフォーム・メカニズム
  - 遂行可能性・表明原理
  - VCG メカニズム・セカンドプライスオークション

参考情報

参考書籍

- 岡田章『ゲーム理論［新版］』
- 坂井豊貴『メカニズムデザイン：資源配分制度の設計とインセンティブ』
- ポール・ミルグロム『オークション：理論とデザイン』
- Vijay Krishna『Auction Theory』
- 林貴志『意思決定理論』