

# 籠の表現から始める加群論

サクラマス

2024年3月

前回のすうがく徒のつどい@オンラインでは、表現と呼ばれるもののうち、群の表現や環の表現などの代数的に取り扱えるものについて、これが函手として捉えられることを紹介しました。このアイデアをベースにしつつ、今回は籠（quiver）と呼ばれる数学的対象の表現を考えます。ここで籠は（多重辺やループを許す）有向グラフのことですが、この「表現」とはどのように定義され、これを調べることはどのような意味があるのでしょうか。本講演は、このような最も基本的な部分を説明し、多少なりとも籠の表現論を身近に感じられるようになることを目標とします。

そのため、まずは籠の表現の定義を与え、具体例を交えつつ説明していきます。講演の中盤に差し掛かる頃に、籠に有限性を課す場合に「籠の  $K$ -線型表現を考えること」と「特殊な有限次元  $K$ -多元環の  $K$ -表現を考えること」とが等価であることを見ます。これを皮切りに籠と多元環との間の関係が明らかになっていき、この考え方を推し進めることで、任意の有限次元  $K$ -多元環が籠とその関係式によって表示ができることが確かめられます。

この「多元環の籠と関係式による表示」は大変便利で、この表示を用いることで有限次元  $K$ -多元環のよい  $K$ -表現（単純表現、射影表現、入射表現、直既約表現などなど）が具体的に記述できることが分かります。本講演の後半では、時間の許す限り具体的に計算する方法を紹介し、多元環の表現や籠の表現の雰囲気伝えることを目指します。

以上が現時点での講演の予定です。但し現時点では詳細が未定のため、当日話される内容と一致しない可能性があることをご理解ください。また、本講演の前半では、線形空間、環、圏の定義とその簡単な例を知っていることを仮定します。ここまでで基本的なモチベーションは大雑把に伝わると思うので、学部1、2年程度の知識があれば十分です。また後半に進むにつれて、環上の加群に関する基本的な性質に馴染みがあるとより聞きやすいような話題が増えていきますが、基本的には環論の言葉を知らずとも（少なくとも論理的整合性が）分かるように進めるつもりですので、そういう話もあるのか、といった感じで、気軽に聞いていただければと思っています。