箙の表現論から始める加群論

サクラマス

お品書き

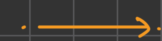
1. 箙とは何か？抑も表現とは
2. 箙の表現と多元環の表現
3. ~~Auslander-Reiten理論.~~ （次回）

君は箙(quiver)を知っているか？

箙とは何か？ 柳も表現とは

君は箙(quiver)を知っているか？

有向グラフのこと

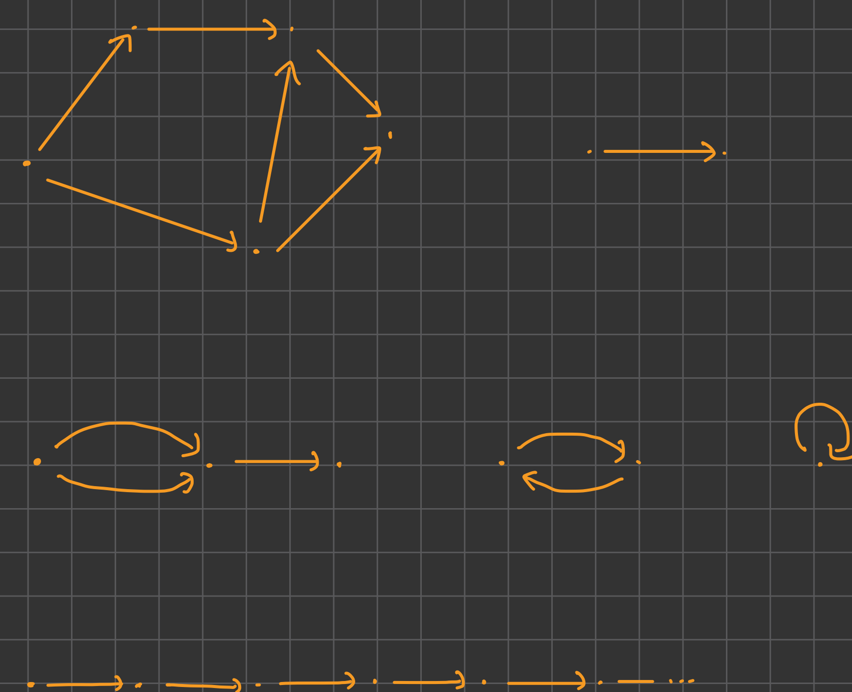


箙とは何か？ 抑も表現とは

君は箙(quiver)を知っているか？

有向グラフのこと

(多重辺 ok
ループ ok)

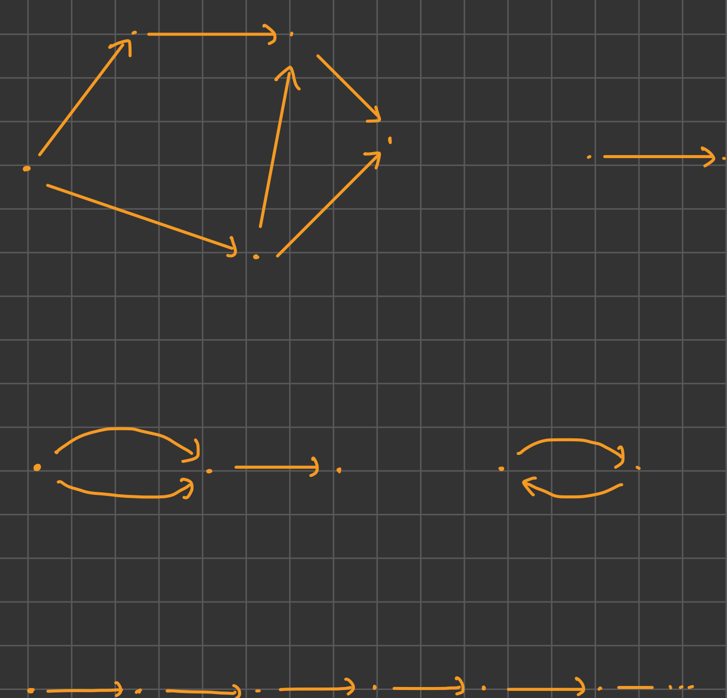


箙とは何か？ 抑も表現とは

<u>定義</u> $Q = \langle \mathrm{ob}Q, \mathrm{mor}Q, \mathrm{dom}, \mathrm{cod} \rangle$ が箙であるとは，
$\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$ が $\mathrm{mor}Q \to \mathrm{ob}Q$ なる写像であることをいう．

<u>注意</u> ・辺 $e \in \mathrm{mor}Q$ につき，$\mathrm{dom}(e)$ を e の始点，$\mathrm{cod}(e)$ を e の終点，といふ．

・$\mathrm{ob}Q$, $\mathrm{mor}Q$ は有限集合とすることが多い．



層とは何か？抑も表現とは

表現とは？

スローガン「数学的対象 X の表現とは，X からの函手のこと」

モノイド，群，環，順序集合，…

X を圏と見做し，固定した圏 $\mathcal{C}$ への函手 $X \to \mathcal{C}$ を考える．

<u>記法</u>　$\mathbf{Set}$ … 集合と写像の圏

$\mathbf{Cat}$ … 圏と函手の圏

K：体，R：環

$\mathbf{Mod}(K)$ … K-線型空間と K-線型写像の圏

$\mathbf{Mod}(R)$ … R-加群と R-加群の準同型写像の圏

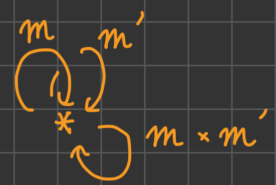
箙とは何か？抑も表現とは

表現とは？（モノイドの表現）

- モノイドを圏と見做す．

  モノイド $M = \langle \underline{M}, \times, 1 \rangle$ と次の圏 $\mathcal{C}(M)$ を同一視する．

  $$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}(M) = \{*\},$$
  $$\mathrm{mor}\,\mathcal{C}(M) = \underline{M},$$
  $$m \circ m' := m \times m'$$



<u>注意</u> 対象が1つの圏はモノイドと見做される．

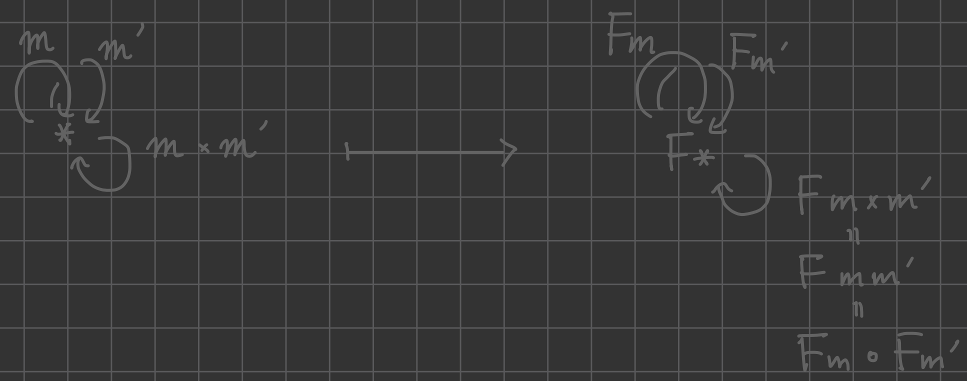
- 圏 $\mathcal{C}(M)$ から $\mathbf{Set}$ への函手を考える．

  函手 $F : \mathcal{C}(M) \to \mathbf{Set}$ は，

  - 対象 $*$ の写り先 $F* =: X$ と，
  - 射 $m\ (\in \underline{M})$ の写り先 $Fm : X \to X$ と

  の2のデータからなり，次を満たす．

  - $F_{m \times m'} = F_{mm'} = F_m \circ F_{m'}$ と
  - $F_{e_M} = F_{\mathrm{id}_*} = \mathrm{id}_{F*} = \mathrm{id}_X$



$\rightsquigarrow$ M-作用を備えた集合 $\langle X, M \to \mathrm{End}_{\mathbf{Set}}(X) \rangle$ を定める．

箙とは何か？抑も表現とは

表現とは？（モノイドの表現）

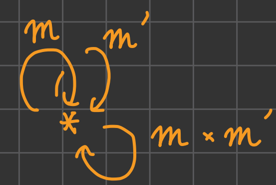
▶ モノイドを圏と見做す.

モノイド $M = \langle \underline{M}, \times, 1 \rangle$ と次の圏 $\mathscr{C}(M)$ を同一視する.

$$\mathrm{ob}\,\mathscr{C}(M) = \{*\},$$

$$\mathrm{mor}\,\mathscr{C}(M) = \underline{M},$$

$$m \circ m' := m \times m'$$



<u>注意</u> 対象が1つの圏はモノイドと見做される.

▶ 圏 $\mathscr{C}(M)$ から $\mathbf{Set}$ への函手を考える.

函手 $F : \mathscr{C}(M) \longrightarrow \mathbf{Set}$ は,

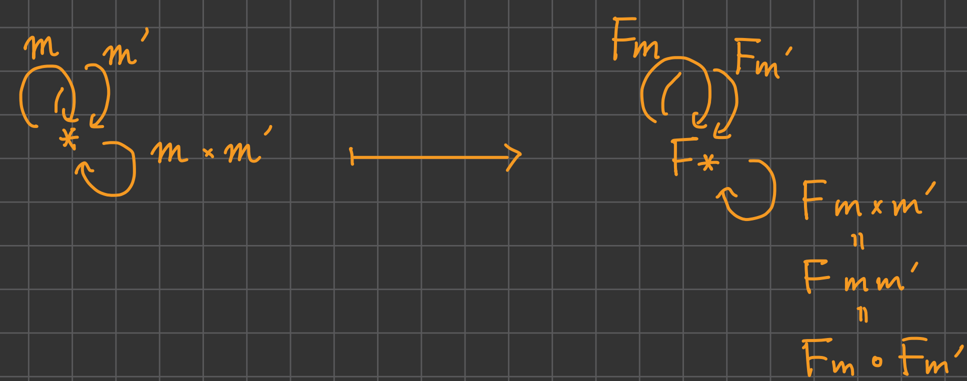
・ 対象 $*$ の写り先 $F* =: X$ と,

・ 射 $m\ (\in \underline{M})$ の写り先 $F_m : X \to X$ と

の2のデータからなり, 次を満たす.

・ $F_{m \times m'} = F_{mm'} = F_m \circ F_{m'}$ と

・ $F e_M = F\,\mathrm{id}_* = \mathrm{id}_{F*} = \mathrm{id}_X$



$\rightsquigarrow$ M-作用を備えた集合 $\langle X,\ M \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{Set}}(X) \rangle$ を定める.

篩とは何か？抑も表現とは

表現とは？（順序集合の表現）

- 順序集合を圏と見做す.
  順序集合 $X = \langle \underline{X}, \leq \rangle$ と次の圏 $\mathscr{C}(X)$ を同一視する.
$$\mathrm{ob}\,\mathscr{C}(X) = \underline{X},$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(X)}(a, b) = \begin{cases} \{*\} & \text{if } a \leq b \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$
  <u>注意</u> 各 Hom 集合の濃度が高々 1 元のとき,(前)順序集合と見做せる.
- 圏 $\mathscr{C}(X)$ から $\mathbf{Set}$ への函手を考える.
  ⇝ これは図式に他ならない.

箙とは何か？抑も表現とは

表現とは？（箙の表現）

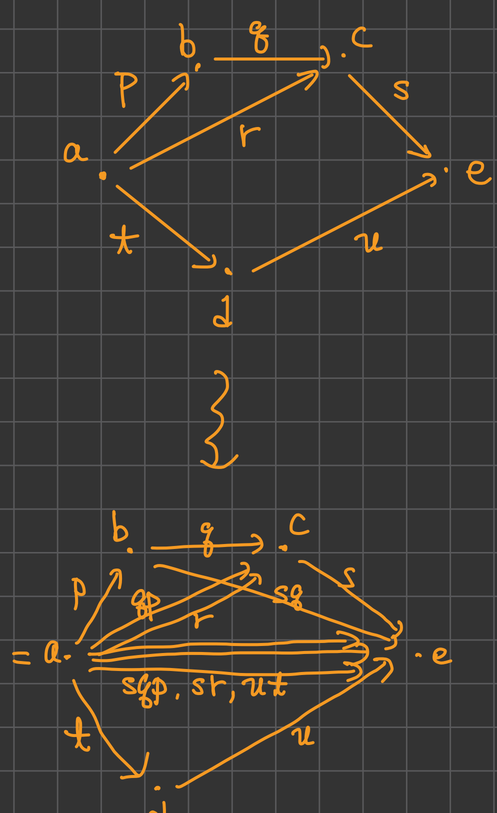
▶ 箙を圏と見做す．

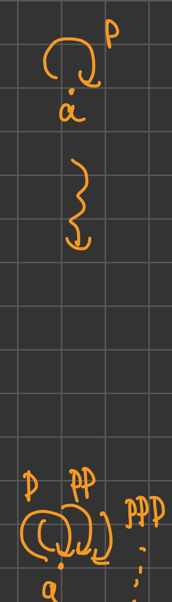
"そのまま"

$$\begin{cases} ob(\mathcal{C}(Q)) := ob(Q) \\ Hom_{\mathcal{C}(Q)}(x, y) = \{\, x \text{ から } y \text{ への } \overset{\text{path}}{\text{道}} \text{ 全体} \,\} \end{cases}$$

とし，道の合成を積とする．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Quiv} \arrow[d, shift right] \\ \mathbf{SemiCat} \arrow[u, shift right, "忘却"'] \arrow[d, shift right] \\ \mathbf{Cat} \arrow[u, shift right, "忘却"'] \end{tikzcd}$$

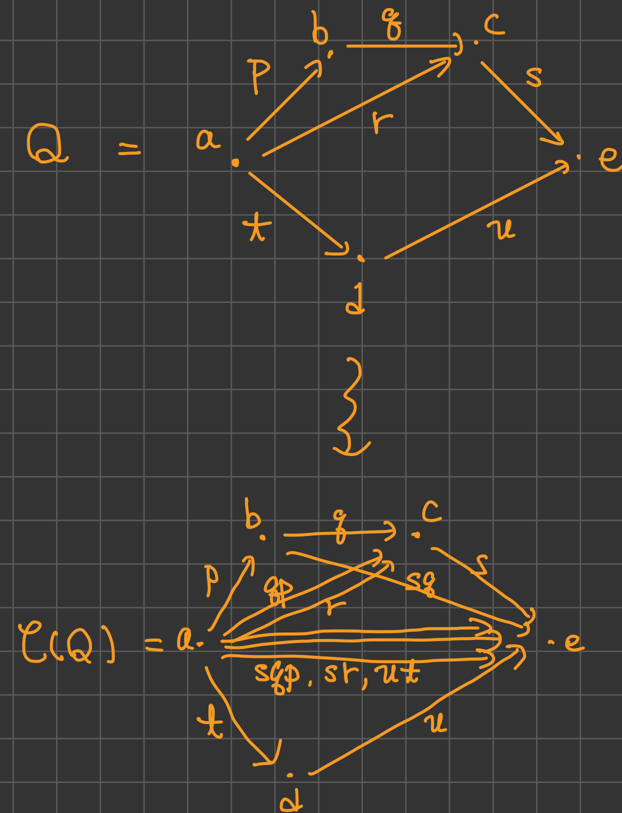




$$Hom_{\mathcal{C}(Q)}(a, a) = \{ e_a, p, pp, ppp, \cdots \}$$

箙とは何か？ 抑も表現とは

表現とは？（箙の表現）



▶ 箙を圏と見做す。 "その要素"

$$\begin{cases} \mathrm{ob}(\mathcal{C}(Q)) := \mathrm{ob}(Q) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(Q)}(x, y) = \{\, x \text{ から } y \text{ への } \overset{\text{path}}{\text{道}} \text{ 全体} \,\} \end{cases}$$

とし，道の合成を積とする。

<u>注意</u> ・道の合成は変な関係式がない

箙から圏への自由な構成になっている。

<u>i.e.</u> $Q \xrightarrow{\text{箙の射}} \mathcal{D}$ を任意に考えると，$Q \longrightarrow \mathcal{D}$ が在ると

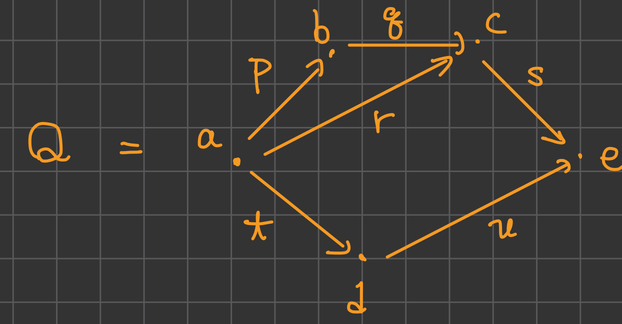
$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d, "\iota"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{C}(Q) \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \text{圏の射（函手）}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>i.e.</u> $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Quiv}}(Q, \mathcal{D}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{C}(Q), \mathcal{D})$

<u>i.e.</u> $\mathcal{C} : \mathrm{Quiv} \to \mathrm{Cat}$ は忘却函手 $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Quiv}$ の左随伴。

箙とは何か？ 抑も表現とは

表現とは？ (箙の表現)



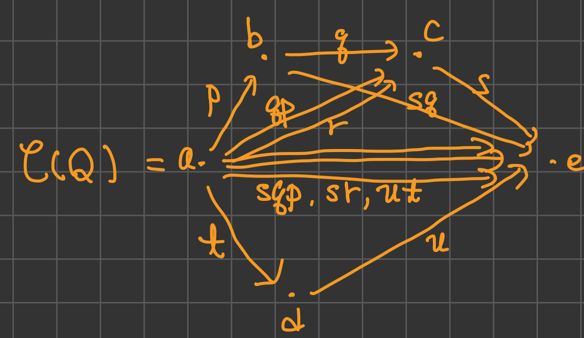
▶ 箙を圏と見做す.

"そのまま"

$$\begin{cases} \mathrm{ob}(\mathcal{C}(Q)) := \mathrm{ob}(Q) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(Q)}(x, y) = \{\, x \text{ から } y \text{ への 道 全体} \,\} \end{cases}$$

path

とし, 道の合成を積とする.



注意: ・道の合成は変な関係式がない

⇝ $\mathcal{C} : \mathbf{Quiv} \to \mathbf{Cat}$ は忘却函手 $\mathbf{Cat} \to \mathbf{Quiv}$ の左随伴

・道の長さという概念が整義的に定まる.

⇝ ・$p \in \mathrm{mor}(\mathcal{C}(Q))$ のとき $\mathrm{len}(p)$ と書く

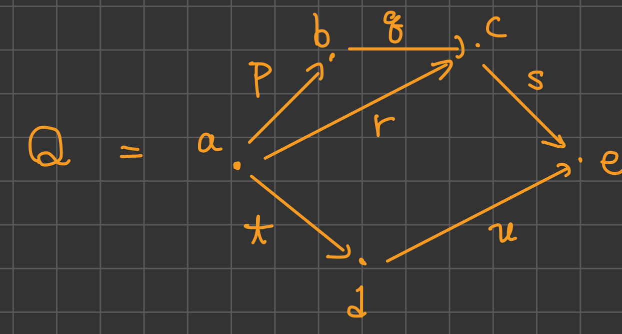
・次が成立する: $\mathrm{len}(pq) \leq \mathrm{len}(p) + \mathrm{len}(q)$

・等号成立条件は, p と q とが合成可能 or $\mathrm{len}(p) = \mathrm{len}(q) = 0$ である.

"非全域性がこのようなややこしさの原因"

箙とは何か？抑も表現とは

表現とは？（箙の表現）

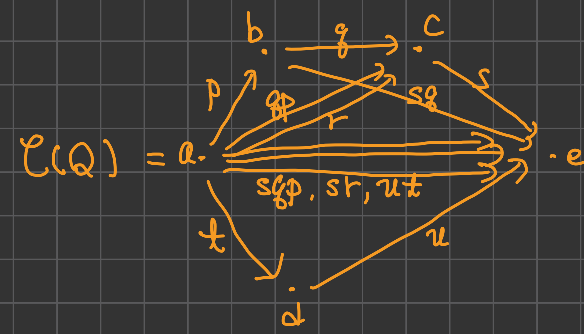


▶ 箙を圏と見做す．

"そのまま"

$$\begin{cases} \mathrm{ob}(\mathcal{C}(Q)) := \mathrm{ob}(Q) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(Q)}(x, y) = \{ x \text{ から } y \text{ への 道}^{\text{path}} \text{ 全体} \} \end{cases}$$

とし，道の合成を積とする．



注意 ・道の合成は変な関係式がない

⇝ $\mathcal{C}$: Quiv → Cat は忘却函手 Cat → Quiv の左随伴

・道の長さという概念が整義的に定まる．

⇝ $p \in \mathrm{mor}(\mathcal{C}(Q))$ のとき $\mathrm{len}(p)$ と書く

・恒等射 ⇔ 長さ 0．

▶ 圏 $\mathcal{C}(Q)$ から Set への函手を考える．

⇝ $Q \hookrightarrow \mathcal{C}(Q)$ を合成すると Q からの箙の射が得られる．

⇝ Q から Set への箙の射と対応する．

⇝ Set に於ける可換とは限らない Q の図式と同じ．

箙とは何か？抑も表現とは

表現とは？（箙の表現）

- ここまでで、次が分かった
  - 箙の定義とその例
  - 箙から圏を自由に構成する方法
    （箙 Q から道圏 $\mathcal{C}(Q) =: \mathrm{Path}(Q)$ を定めた。）
  - 箙 Q の表現 $\Leftrightarrow$ 自然に定まる圏 $\mathrm{Path}(Q)$ からの函手
    $\Leftrightarrow$ 箙 Q から圏を箙に忘却した箙への箙の射
    $$\left(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathrm{Path}(Q), \mathcal{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Quiv}}(Q, \underline{\mathcal{C}}) \right)$$
  - $\mathrm{Rep}(Q, \mathcal{C}) := \mathrm{Func}(\mathrm{Path}(Q), \mathcal{C})$ と書く。

- では何故箙の表現を考えるのか？
  A0. 有限次元多元環が具体的に分かる
  A1. 組合せ論と多元環の表現論を繋ぐ！
  A2. 多元環の表現だけでは分からない本質が見える！ etc...

- 今回は加群論（over 多元環）を具体的に見るために道具としてこれを用いる。（A0）.

箙とは何か？抑も表現とは

表現の例（Mod(K) の場合）

・箙 $A_2 = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ の Mod(K) での表現を考える：

<u>例0</u>　$0 = 0 \xrightarrow{0} 0$　←… 零表現

<u>例1</u>　$S(1) = K \longrightarrow 0$
　　　$S(2) = 0 \longrightarrow K$　← 単純表現

<u>例2</u>　$P(1) = K \longrightarrow K$
　　　$P(2) = 0 \longrightarrow K$　← 射影表現

$$\begin{tikzcd}
 & (W_1 \xrightarrow{w_\alpha} W_2) \arrow[d, "f"] \\
(K \to K) \arrow[r, "g"'] & (V_1 \xrightarrow{v_\alpha} V_2)
\end{tikzcd}$$

$$\|$$

$$\begin{tikzcd}
 & W_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & W_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
K \arrow[r, "g_1"'] \arrow[dr] & V_1 \arrow[dr] & \\
 & K \arrow[r, "g_2"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

箙とは何か？ 抑も表現とは

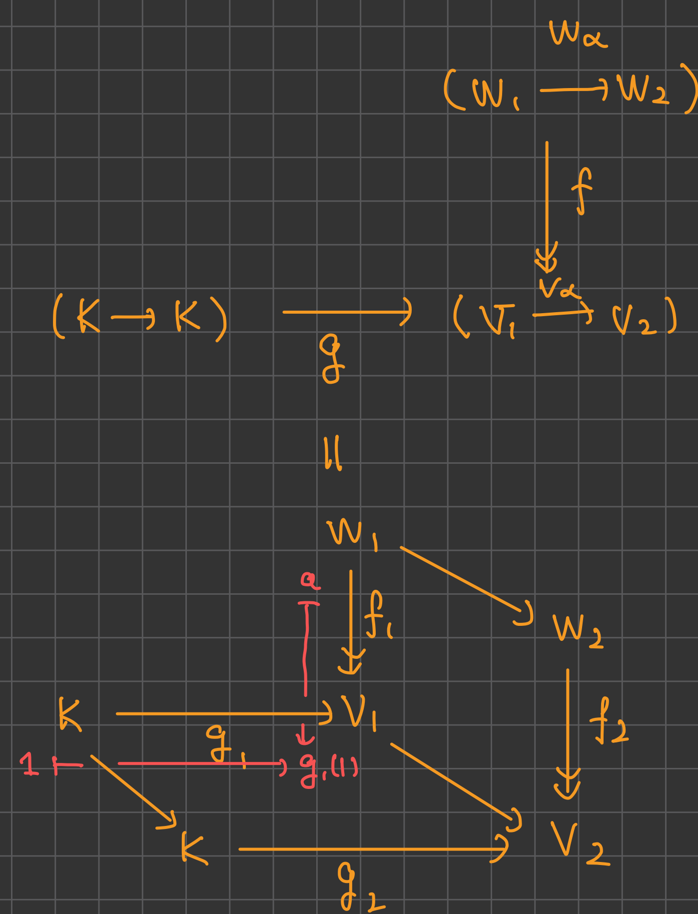
表現の例（Mod(K)の場合）

・箙 $A_2 = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ の Mod(K) での表現を考える：

<u>例0</u>　$0 = 0 \xrightarrow{0} 0$　← 零表現

<u>例1</u>　$S(1) = K \longrightarrow 0$
　　　$S(2) = 0 \longrightarrow K$　← 単純表現

<u>例2</u>　$P(1) = K \longrightarrow K$
　　　$P(2) = 0 \longrightarrow K$　← 射影表現



箙とは何か？抑も表現とは

表現の例（Mod(K) の場合）

・箙 $A_2 = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ の Mod(K) での表現を考える：

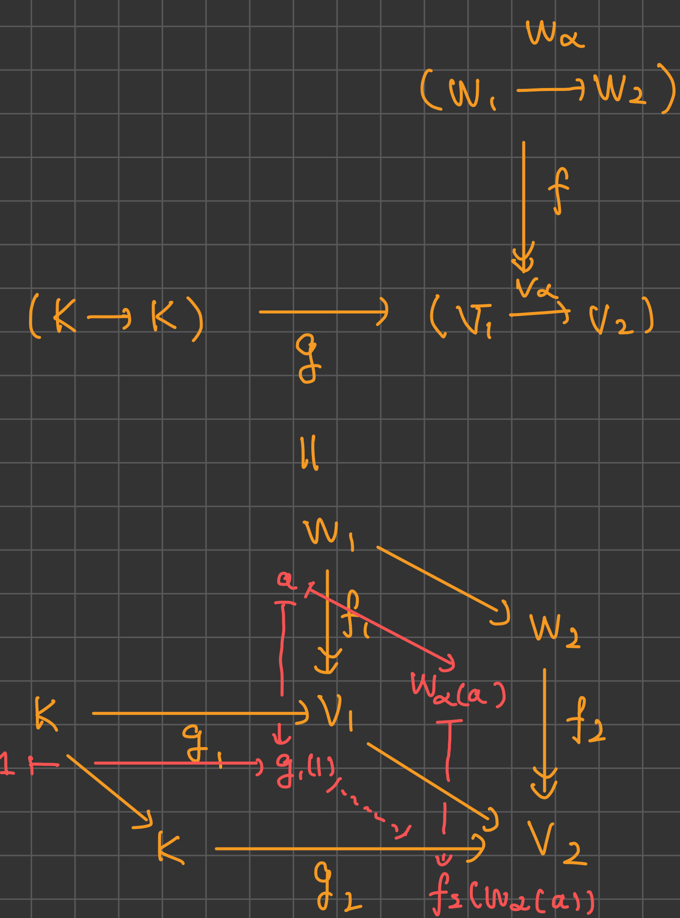
<u>例0</u> $\mathbb{0} = 0 \xrightarrow{0} 0$ ← 零表現

<u>例1</u> $S(1) = K \longrightarrow 0$

$S(2) = 0 \longrightarrow K$ ← 単純表現

<u>例2</u> $P(1) = K \longrightarrow K$

$P(2) = 0 \longrightarrow K$ ← 射影表現



箙とは何か？抑も表現とは

表現の例（Mod(K) の場合）

・箙 $A_2 = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ の Mod(K) での表現を考える：

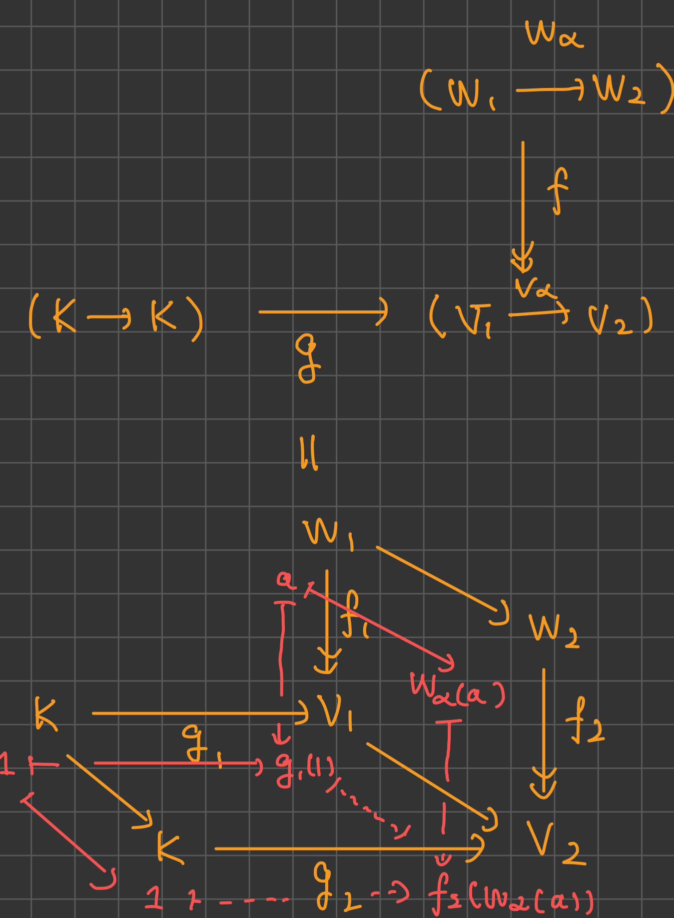
例0　$0 = 0 \xrightarrow{0} 0$　←… 零表現

例1　$S(1) = K \longrightarrow 0$

　　　$S(2) = 0 \longrightarrow K$　← 単純表現

例2　$P(1) = K \longrightarrow K$

　　　$P(2) = 0 \longrightarrow K$　← 射影表現



箙とは何か？ 抑も表現とは

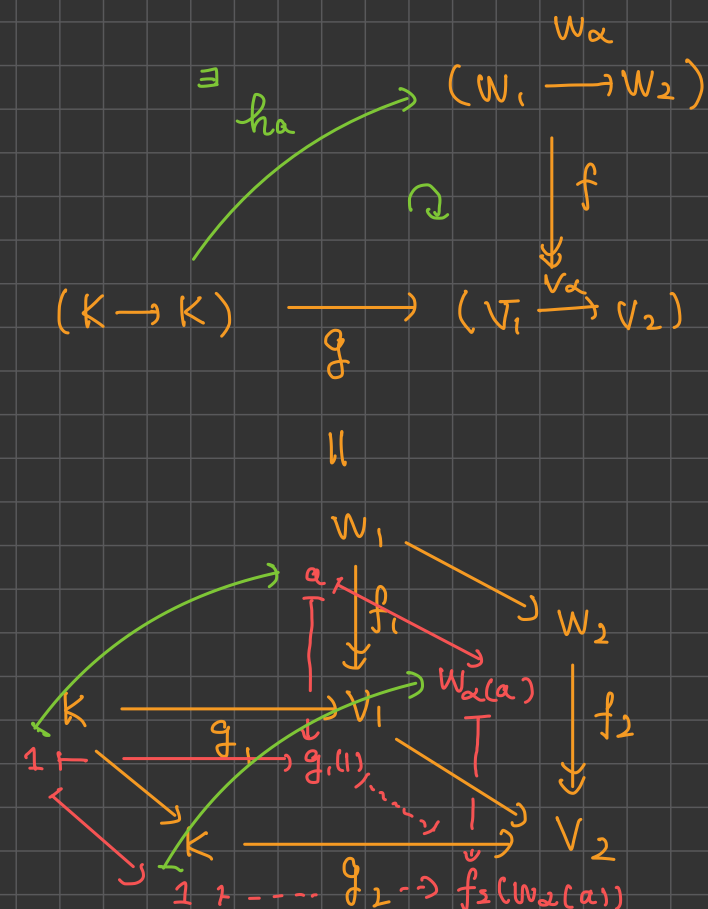
表現の例（Mod(K) の場合）

・箙 $A_2 = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ の Mod(K) での表現を考える：

例0　$0 = 0 \xrightarrow{0} 0$　⇠ 零表現

例1　$S(1) = K \longrightarrow 0$
　　$S(2) = 0 \longrightarrow K$　⇠ 単純表現

例2　$P(1) = K \longrightarrow K$
　　$P(2) = 0 \longrightarrow K$　⇠ 射影表現



箙とは何か？抑も表現とは

表現の例（Mod(K)の場合）

・箙 $A_2 = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ の Mod(K) での表現を考える：

<u>例0</u> $0 = [0 \xrightarrow{0} 0]$ ← 零表現 （零対象）

<u>例1</u> $S(1) = [K \longrightarrow 0]$
$S(2) = [0 \longrightarrow K]$ ← 単純表現 （単純対象）

<u>例2</u> $P(1) = [K \longrightarrow K]$
$P(2) = [0 \longrightarrow K]$ ← 射影表現 （射影対象）

<u>例3</u> $I(1) = [K \longrightarrow 0]$
$I(2) = [K \longrightarrow K]$ ← 入射表現 （入射対象）

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \underline{[0 \to K]} \arrow[dr] & \cdots\cdots\cdots & \underline{[K \to 0]} \\ & \underline{\underline{[K \to K]}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

・<u>事実</u> Irep$(A_2, \mathrm{Mod}(K))$ に於ける直既約対象はこれで尽きている

（少なくとも今の私には加群論を回避する手法は分かっていない）

箙とは何か？ 抑も表現とは

表現の例（Mod(K) の場合）

$A_2 : \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{[0 \to K]} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[K \to 0]} \\
& {[K \to K]} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$A_2 : \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{[0 \to 0 \to K]} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[0 \to K \to 0]} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[K \to 0 \to 0]} \\
& {[0 \to K \to K]} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[K \to K \to 0]} \arrow[ur] & \\
& & {[K \to K \to K]} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

$\cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{[0 \to 0 \to K]} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[K \to K \to 0]} \arrow[dr] & \\
& {[K \to K \to K]} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[0 \to K \to 0]} \\
{[K \to 0 \to 0]} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[0 \to K \to K]} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

- <u>事実</u> $\mathrm{Irrep}(A_2, \mathrm{Mod}(K))$ に於る直既約対象はこれで尽きている

（少なくとも今の私には加群論を回避する手法は分かっていない）

箙とは何か？抑も表現とは

表現の例．（$\mathrm{Mod}(K)$ の場合）

<u>定義</u>　圏 $\mathscr{C}$ の対象 X が直既約であるとは，圏 $\mathscr{C}$ に於て

$$\varphi : Y \amalg Z \xrightarrow{\cong} X \Rightarrow \varphi \circ \iota_X \text{ か } \varphi \circ \iota_Y \text{ は同型射}$$

が成立することをいい，直既約対象全体を $\mathrm{indec}(\mathscr{C})$ と書く．

<u>定義</u>　M, N を箙 Q の表現とする．（i.e. $M, N : \mathscr{C}(Q) \to \mathrm{Mod}(K)$）

次で定義される表現を $M \oplus N$ と書く．

- $a \in \mathrm{ob}\,Q$ に対し，$(M \oplus N)_a := M_a \oplus N_a$
- $p \in \mathrm{mor}\,Q$ に対し，$(M \oplus N)_p := M_p \oplus N_p$

線型写像の行列表示をすれば，

$(M \oplus N_p) = \begin{bmatrix} M_p & O \\ O & N_p \end{bmatrix}$ ということ．

<u>定義</u>　箙 Q の表現 M について，

$$M \cong X \oplus Y \Rightarrow M \cong X \text{ or } M \cong Y$$

が成立するとき，M を直既約表現という．

<u>演習</u>　$\mathrm{indec}(\mathrm{rep}(Q, \mathrm{Mod}(K))) = \{\text{直既約表現}\}$ を確かめよ．

箙とは何か？ 抑も表現とは

表現の例 (Mod(K) の場合)

直既約対象に注目しているのは，次の事実による：

<u>事実</u>　Q の有限次元表現は一意的な直既約分解をもつ

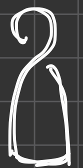
⇝ よって，先の例では本質的に全ての<u>有限次元表現</u>が分かったといえる
(i.e. $\mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}(K))$ の対象)

⇝ 直既約表現の間の"基本的な射"を決定したくなってくる
(もし決定できれば $\mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}(K))$ の構造がよく分かる)

⇝ Auslander-Reiten 理論.

<u>注意</u>　上の事実は，より精密に次のように述べられる：
$\mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}(K))$ は Krull-Schmidt 圏である.

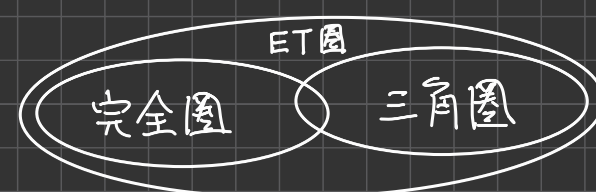
箙とは何か？抑も表現とは



rep(Q, mod(K)) の構造は分かったけど，
いったい加群論はどこに出てくるんだ…？

$\rightsquigarrow$ 次節で明らかになる！

注意　ここまでは殆ど圏に対する言及しかしていない．
このことは重要で，Auslander-Reiter理論は
完全圏や三角圏，更にはET圏へ拡張される．



箙の表現と多元環の表現

(よくある) 概略

$$
\begin{tikzcd}
\text{箙} & & \text{道多元環} \\
Q \arrow[rr, leftrightsquigarrow] \arrow[d, rightsquigarrow, "\text{表現}"] & & KQ \arrow[d, rightsquigarrow, "\text{表現}"] \\
\mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}(K)) \arrow[rr, leftrightsquigarrow, "\text{圏同値!}"'] & & \mathrm{mod}(KQ)
\end{tikzcd}
$$

▶ 以上より, "道多元環として書かれるような多元環" の表現 (= 加群) は, Q の表現に帰着される.

<u>step1</u> 箙 Q から道多元環 KQ を構成する.

<u>step2</u> 箙 Q の表現から KQ の表現を構成する.

<u>step3</u> 道多元環 KQ の表現から Q の表現を構成する.

箙の表現と多元環の表現

(よくある)概略

$$
\begin{tikzcd}
\text{箙} & & \text{道多元環} \\
Q \arrow[rr, leftrightarrow, squiggly] \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] & & KQ \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] \\
\mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}(K)) \arrow[rr, leftrightarrow, squiggly, "\text{圏同値!}"'] & & \mathrm{mod}(KQ)
\end{tikzcd}
$$

▶ 以上より、"道多元環として書かれるような多元環"の表現(=加群)は、Qの表現に帰着される。

<u>step1</u>　箙Qから道多元環KQを構成する。

<u>step2</u>　箙Qの表現からKQの表現を構成する。

<u>step3</u>　道多元環KQの表現からQの表現を構成する。

箙の表現と多元環の表現

<u>step1</u>　箙Qから道多元環KQを構成する.

▶ 道全体を基底とするK-線型空間 $KQ := K^{\oplus \mathrm{Path}(Q)}$ について,
道 p に対応するKQの元を e_p とすると, $(e_p)_{p\in \mathrm{Path}(Q)}$ はKQの基底である.

▶ 道の合成を用いてK-双線型写像 $\times$ を

$$\begin{array}{rccc} \times : & KQ\times KQ & \longrightarrow & KQ \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \langle e_p, e_q\rangle & \longmapsto & e_{pq} \end{array}$$

但 p と q とが合成不能のときは $e_{pq}=0$ とする.

と定義すると, Path(Q)に於て道の合成が結合的なので $\times$ も結合的

pは頂点、

▶ Qが有限箙なので, $1_{KQ} := \sum\{e_p \mid \mathrm{len}(p)=0\}$ が定義でき, $\times$ に関する単位元である.

($\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & c \end{tikzcd}$ とすると, $e_b(e_f+e_g+e_h)e_c = e_g+e_h$ となっている)

$\rightsquigarrow$ $\langle KQ, \times, 1_{KQ}\rangle$ はK-多元環のデータを定める.

箙の表現と多元環の表現

step2　箙 Q の表現から KQ の表現を構成する.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & b \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] M_f \arrow[r] & M_b \arrow[r] & M_g \\ M_a \arrow[rr, "M_h"'] & & M_c \end{tikzcd}$$

$$Q \longrightarrow \mathrm{mod}(K)$$

▶ 箙 Q の表現 $M : Q \to \mathrm{mod}(K)$ を "1つに纏める". 即ち

$$F(M) := \bigoplus_{a \in Q_0} M_a$$

として, KQ の作用を道を用いて定める:

$$\begin{array}{ccccc} KQ & \longrightarrow & (\,F(M) & \longrightarrow & F(M)\,) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (i \xrightarrow{p} j) & \longmapsto & \sum_{a \in Q_0} k_a x_a & \longmapsto & \tilde{M}_p(k_i x_i) \end{array}$$

この構成に於いては

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "M"] \arrow[d, hook] & \mathrm{mod}(K) \\ \mathrm{Path}(Q) \arrow[ur, dashed, "\exists !"'] \arrow[ur, phantom, "Q", near start, shift left=3] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{M}$ を用いる.

これは, KQ の表現となっている(演習)

step3　道多元環 KQ の表現から Q の表現を構成する.

▶ 道多元環 KQ の表現 $M : KQ \longrightarrow \mathrm{mod}(K)$ を任意にとる.

$V := M(*)$ なる K-線型空間を "Q の作用によって分解する" 即ち,

$$G(M)_0(i) := e_i V e_i$$

$$G(M)_1(i \xrightarrow{p} j) = e_i V e_j$$

とおくと, $G(M) : Q \longrightarrow \mathrm{mod}(K)$ が定まり, これは Q の表現となっている(演習)

箙の表現と多元環の表現

(よくある)概略(再掲)

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=huge]
\text{箙}\ Q \arrow[r, "\text{構成}"] \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] & \text{道多元環}\ KQ \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] \\
\mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}(K)) \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{mod}(KQ) \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

- 以上より, "道多元環として書かれるような多元環" の表現(=加群)は, Q の表現に帰着される.

事実(Gabriel) $\mathrm{indec}(\mathrm{mod}(KQ))$ が本質的有限であることは, $Q = A_n, D_n, E_{6,7,8}$ と同値.

[悲報]

- これは 遺伝多元環 のクラスしか調べていないことになる.
- そもそも 上の図式も 概念的には 整理されきっていないように見える.

箙の表現と多元環の表現

(よくある)概略 (再掲)

$$
\begin{tikzcd}
\text{箙 } Q \arrow[r, "\text{構成}"] \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] & \text{道多元環 } KQ \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] \\
\mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}(K)) \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{mod}(KQ) \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}
$$

- 以上より，"道多元環として書かれるような多元環"の表現(=加群)は，Qの表現に帰着される．

事実(Gabriel) $\mathrm{indec}(\mathrm{mod}(KQ))$ が本質的有限であることは，$Q = A_n, D_n, E_{6,7,8}$ と同値．

[悲報]

- これは遺伝多元環のクラスしか調べていないことになる．
- そもそも上の図式も概念的には整理されきっていないように見える．

箙の表現と多元環の表現

[朗報] 有限次元多元環は，少し今までの話を modify すると射程に入る.

- Aを有限次元多元環とする.
- Aから次のように箙 Q_A を構成できる:

  $\mathrm{ob}Q_A := \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 但，e_i 達は原始直交冪等元の代表系.

  $\mathrm{Hom}_{Q_A}(e_i, e_j) = \{x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_k}\}$ 但，x_{α_i} 達は $e_i \, {}^{\mathrm{rad}(A)}/_{\mathrm{rad}^2(A)} \, e_j$ の基底

- 次のような全射が存在する:

$$
\begin{array}{cccc}
\varphi : & KQ_A & \longrightarrow & A \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& x_{\alpha_i} & \longmapsto & x_{\alpha_i}
\end{array}
$$

☺ 全射性を K: 代数閉の場合に軽く見る. Wedderburn-Malcev の定理より

$$0 \to \mathrm{rad}(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathrm{rad}(A) \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{ex})$$

は分裂する. Artin性より $\mathrm{rad}(A)$ は冪零で，よって

$\mathrm{rad}(A) = \langle x_{\alpha_i}$ 達で生成$\rangle$ ←⋯ ここに冪零性を用いる

$A/\mathrm{rad}(A) = \langle e_i$ 達で生成$\rangle$

が分かるので ok.

- Ker φ は許容的イデアルである.

(生成系を道のみでとるとき，長さは2以上かつ有界にできる)

箙の表現と多元環の表現

(よくある) 概略 $+\ \alpha$

$$
\begin{tikzcd}
\text{箙} \\
Q \ \text{with}\ I \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] & KQ/I \arrow[l, squiggly] \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] \\
\boxed{???} \arrow[r, leftrightarrow, squiggly, "\text{圏同値}"'] & \mathrm{mod}(KQ/I)
\end{tikzcd}
$$

道多元環

になって欲しい.

箙の表現と多元環の表現

(よくある)概略 + α

$$\begin{tikzcd}
\text{箙 } Q \text{ with } I \arrow[r, leftrightsquigarrow] \arrow[d, rightsquigarrow, "\text{表現}"] & \text{道多元環 } KQ/I \arrow[d, rightsquigarrow, "\text{表現}"] \\
\boxed{???} \arrow[r, leftrightsquigarrow, "\text{圏同値}"'] & \mathrm{mod}(KQ/I)
\end{tikzcd}$$

になって欲しい.

ここは"I (pathの集まり)に対応する線型写像が0になっているもの"に限ると上手くいく!

定義 I を path の集合とする. Q の表現 M が I で束縛されるとは,

$$p \in I \Longrightarrow M_p = 0$$

をみたすことをいう. このような表現のなす充満部分圏を $\mathrm{rep}(Q, I, \mathrm{mod}(K))$ と書く.

箙の表現と多元環の表現

(よくある)概略 + α

箙　　　　　道多元環

$$\begin{tikzcd}
Q \text{ with } I \arrow[r, leftrightsquigarrow] \arrow[d, "\text{表現}"] & KQ/I \arrow[d, "\text{表現}"] \\
\mathrm{rep}(Q, I, \mathrm{mod}(K)) \arrow[r, leftrightsquigarrow, "\text{圏同値}"'] & \mathrm{mod}(KQ/I)
\end{tikzcd}$$

[悲報]

▶ ~~これは遺伝多元環のクラスしか調べていないことになる.~~

▶ そもそも上の図式も概念的には整理されきっていないように見える.

----> なるべくここの改善を試みる!

箙の表現と多元環の表現

(よくある) 概略 + α

$$
\begin{tikzcd}
\text{箙} & & \text{道多元環} \\
Q \text{ with } I \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] \arrow[rr, leftrightsquigarrow] & & KQ/I \arrow[d, squiggly, "\text{表現}"] \\
\mathrm{Rep}(Q, I, \mathrm{mod}(K)) \arrow[rr, leftrightsquigarrow, "\text{圏同値}"'] & & \mathrm{mod}(KQ/I)
\end{tikzcd}
$$

[悲報]

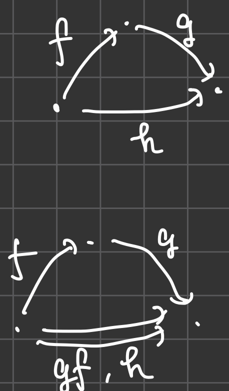
- ~~これは遺伝多元環のクラスしか調べていないことになる.~~
- そもそも上の図式も概念的には整理されきっていないように見える.

⋯→ なるべくここの改善を試みる!


講演の準備期間は短いって
わかってたのに・・・
どうしてもっと前もってちゃんと
準備しようと
思わなかったんだろう・・・
END

提供： N.Y さん

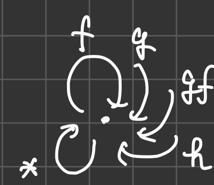
箙の表現と多元環の表現



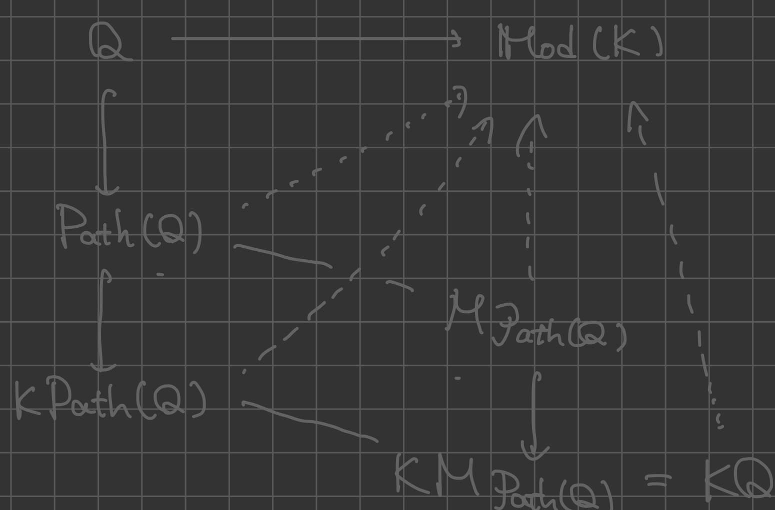
箙

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[d, "\text{自由}"] & \\
\mathrm{Path}(Q) \arrow[r, shift left, "1:1"] \arrow[d, "\text{自由}"] & M_{\mathrm{Path}(Q)} \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\text{自由}"] \\
K\mathrm{Path}(Q) \arrow[r, shift left, "1:1"] & KM_{\mathrm{Path}(Q)} = KQ \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

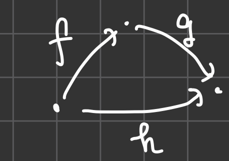
"合成が未定義"を表す元を追加

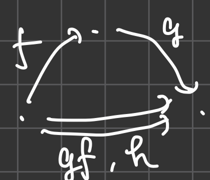


	f	g	gf	h
f	*	gf	*	*
g	*	*	*	*
gf	*	*	*	*
h	*	*	*	*



箙の表現と多元環の表現

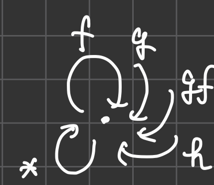




"合成が未定義"を表す元を追加

$$
\begin{array}{c}
\text{箙} \\
Q
\end{array}
$$

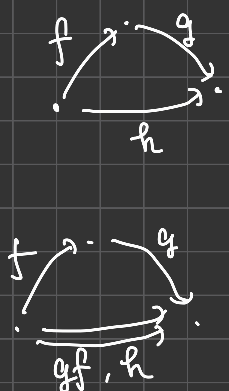
$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[d, "\text{自由}"] & \\
\mathrm{Path}(Q) \arrow[r, shift left, "1:1"] \arrow[d, "\text{自由}"] & M_{\mathrm{Path}(Q)} \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\text{自由}"] \\
K\mathrm{Path}(Q) \arrow[r, shift left, "1:1"] & KM_{\mathrm{Path}(Q)} = KQ \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}
$$



	f	g	gf	h
f	$*$	gf	$*$	$*$
g	$*$	$*$	$*$	$*$
gf	$*$	$*$	$*$	$*$
h	$*$	$*$	$*$	$*$

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[rr] \arrow[d, hook] & & \mathrm{Mod}(K) \\
\mathrm{Path}(Q) \arrow[d, hook] \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & M_{\mathrm{Path}(Q)} \arrow[ur, dashed] \arrow[d, hook] & \\
K\mathrm{Path}(Q) \arrow[r] \arrow[uurr, dashed] & KM_{\mathrm{Path}(Q)} = KQ \arrow[uur, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

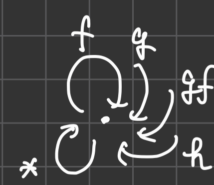
箙の表現と多元環の表現



箙

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[d, mapsto, "\text{自由}"] & & \\
\mathrm{Path}(Q) \arrow[rr, shift left, "1:1"] \arrow[d, mapsto, "\text{自由}"] & & M_{\mathrm{Path}(Q)} \arrow[ll, shift left] \arrow[d, mapsto, "\text{自由}"] \\
K\mathrm{Path}(Q) \arrow[rr, shift left, "1:1"] & & KM_{\mathrm{Path}(Q)} = KQ \arrow[ll, shift left]
\end{tikzcd}
$$

"合成が未定義"を表す元を追加



	f	g	gf	h
f	*	gf	*	*
g	*	*	*	*
gf	*	*	*	*
h	*	*	*	*

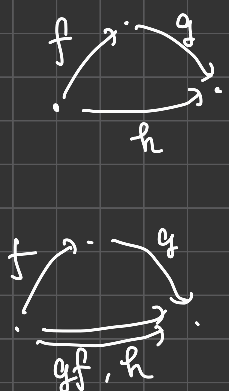
$\phi = I \cap \mathrm{mor}(Q)$ i.e. 箙の情報を忘れていない.

$$
\begin{tikzcd}
I \cap \mathrm{Path}(Q) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, mapsto] & M_{I \cap \mathrm{Path}(Q)} \arrow[d, mapsto] \\
K(I \cap \mathrm{Path}(Q)) \arrow[r, leftrightarrow] & KM_{I \cap \mathrm{Path}(Q)} = I
\end{tikzcd}
$$

（許容的イデアル）.

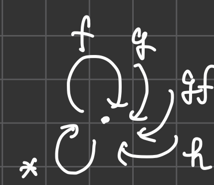
圏のイデアル
（部分圏
＋
作用で閉）

箙の表現と多元環の表現



"合成が未定義"を表す元を追加

$$
\begin{tikzcd}
\text{箙 } Q \arrow[d, "\text{自由}"] & \\
Path(Q) \arrow[r, shift left, "1:1"] \arrow[d, "\text{自由}"] & M_{Path(Q)} \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\text{自由}"] \\
KPath(Q) \arrow[r, shift left, "1:1"] & KM_{Path(Q)} = KQ \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}
$$



	f	g	gf	h
f	*	gf	*	*
g	*	*	*	*
gf	*	*	*	*
h	*	*	*	*

$\phi = I \cap mor(Q)$ i.e. 箙の情報を忘れていない.

$$
\begin{tikzcd}
\phi = I \cap mor(Q) \arrow[d, hook] & \\
I \cap Path(Q) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, hook] & M_{I \cap Path(Q)} \arrow[d, hook] \\
K(I \cap Path(Q)) \arrow[r, leftrightarrow] & KM_{I \cap Path(Q)} = I
\end{tikzcd}
$$

圏のイデアル
(部分圏 + 作用で閉)

I (許容的イデアル).

箙の info. を忘れない & 有限次元.

Auslander-Reiten 理論 (予告)

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Fun}(\mathrm{mod}(A)^{op}, \mathrm{mod}(K)) = \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(A)) \\
\mathrm{Fun}(A^{op}, \mathrm{mod}(K)) = \mathrm{mod}(A) \arrow[u, hook] \\
A \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

$$0 \leftarrow S \leftarrow \mathrm{Hom}(-, M) \leftarrow \mathrm{Hom}(-, N) \leftarrow \mathrm{Hom}(-, L) \leftarrow 0$$

Auslander-Reiten 理論 (予告)

$$\begin{array}{c} \mathrm{Fun}(\mathrm{mod}(A)^{op}, \mathrm{mod}(K)) = \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(A)) \\ \uparrow \\ \mathrm{Fun}(A^{op}, \mathrm{mod}(K)) = \mathrm{mod}(A) \\ \uparrow \\ A \end{array}$$

$$0 \leftarrow S \leftarrow \mathrm{Hom}(-, M) \leftarrow \mathrm{Hom}(-, N) \leftarrow \mathrm{Hom}(-, L) \leftarrow 0$$

$$0 \to M \to N \to L \to 0 \quad \text{(almost split seq.)}$$