

$(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルについて

よの

2024 年 3 月 31 日

① 1 圏から高次圏へ

② $(\infty, 1)$ 圏のモデル

③ モデル圏論

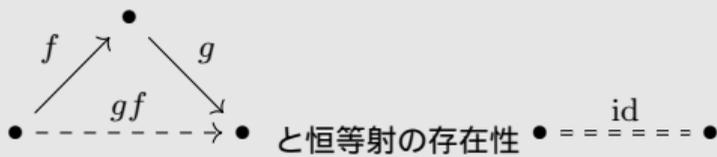
④ $(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルの等価性

- ① 1 圏から高次圏へ
- ② $(\infty, 1)$ 圏のモデル
- ③ モデル圏論
- ④ $(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルの等価性

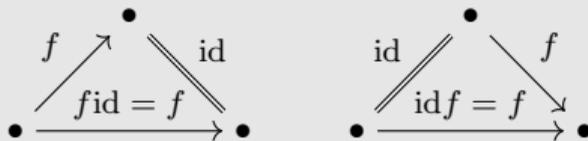
1 圏

定義 1.1 (1 圏)

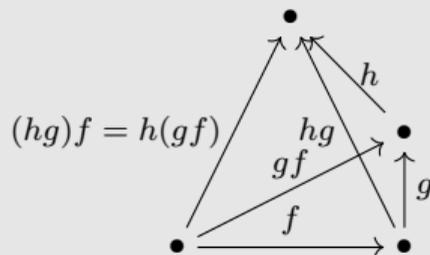
次の条件を満たすクラスの組 $\mathcal{C} = (\text{Ob}(\mathcal{C}), \text{Mor}(\mathcal{C}))$ を 1 圏 (1-category) という.



- 恒等射公理



- 結合性公理



2 圏

1 射の間に「2 射」が存在するような圏の例を挙げる.

例 1.2

- 小圏の圏 $\mathcal{C}at$ における 1 射 (関手 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$) の間には, 自然変換 $F \Rightarrow G$ が存在する.
- 位相空間の圏 $\mathcal{T}op$ における 1 射 (連続写像 $f, g : X \rightarrow Y$) の間には, ホモトピー $f \Rightarrow g$ が存在する.

このような圏は 1 圏として扱うと不都合が生じることがある.

注意 1.3

$\mathcal{C}at$ における次の図式の可換性は $H = GF$ を意味している.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{D} & \\
 F \nearrow & & \searrow G \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E}
 \end{array}$$

しかし, 関手は「自然同型を除いて一意」に定義されるべきであり, 自然同型の違いは許すべきであった.

$\mathcal{C}at$ では, 1 圏が持っていない「2 射 (=1 射の間の射)」の構造まで考える必要がある.

高次の射の可逆性

1 射だけでなく, 2 射 (1 射の間の射) が存在するような圏を 2 圏 (2-category) という.
より一般に, n 射までの構造を持つような圏を n 圏 (n -category) という.

注意 1.4

Cat を 1 圏としてみなすことの不都合さは見たが, 2 射としてすべての自然変換をとることも不自然である.¹
つまり, この図式の可換性は「関手の一致」や「自然変換の存在」ではなく, 「自然同型の存在」を意味するべきである.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{D} & \\
 F \nearrow & & \searrow G \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E}
 \end{array}$$

Cat は 1 圏としては tight すぎる一方で, 一般の自然変換まで考えることは loose すぎる.

例 1.5

Top における 2 射はホモトピーであったが, これは自然に可逆である. (逆向きのホモトピーを考えればよい.)
更に, ホモトピーのホモトピー (3 射) なども考えれるが, これらはすべて可逆である.

¹関手は「自然同型の違いを除いて」一致するべきであって, 「自然変換の違いを除いて」考えることはほとんどない.

(n, k) 圏および (∞, k) 圏

多くの高次圏では高次の射は可逆なので、ある k 射以降がすべて可逆であるような n 圏が重要である。

定義 1.6 ((n, k) 圏)

$(k + 1)$ 射以降の射がすべて可逆であるような n 圏を (n, k) 圏 ((n, k) -category) という。

例 1.7

- 通常の亜群は $(1, 0)$ 圏である。
- 通常の圏は $(1, 1)$ 圏である。
- Cat や Top は $(2, 1)$ 圏である (とみなす)。

(n, k) 圏の定義において、 $n \rightarrow \infty$ としたものが (∞, k) 圏である。

定義 1.8 ((∞, k) 圏)

k を固定したときの (n, k) 圏の集まりを (∞, k) 圏 ((∞, k) -category) という。

本稿の主題は $k = 1$ とした $(\infty, 1)$ 圏である。つまり、2 射以上がすべて可逆な ∞ 圏である。

- ① 1 圏から高次圏へ
- ② $(\infty, 1)$ 圏のモデル
- ③ モデル圏論
- ④ $(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルの等価性

位相的圏と単体的圏

$(\infty, 1)$ 圏は 2 射以上はすべて可逆であったので、射の集まりとして「Hom 空間」を考える方法が挙げられる。つまり、 $(\infty, 1)$ 圏は「空間」で豊穡された圏であると考えられる。

定義 2.1 (位相的圏)

$\mathcal{C}\mathcal{G}$ 豊穡圏² を位相的圏 (topological category) という。位相的圏と位相的関手のなす圏を $\text{Cat}_{\mathcal{T}\text{op}}$ と表す。

定義 2.2 (単体的圏)

Set_{Δ} 豊穡圏³ を単体的圏 (simplicial category) という。単体的圏と単体的関手のなす圏を Cat_{Δ} と表す。

豊穡圏を用いた定義は非常に簡明であり、豊穡圏論の一般論を使えることは利点である。しかし、 $(\infty, 1)$ 関手圏の定義など、実際に扱うことは困難な場合が多い。⁴

² $\mathcal{C}\mathcal{G}$ はコンパクト生成弱 Hausdorff 位相空間の圏であり、 $\mathcal{T}\text{op}$ よりも性質がよい。

³ Set_{Δ} の「空間らしさ」は分かりづらいが、Dold-Kan 対応や、 $(\text{Set}_{\Delta})_{\text{Quillen}}$ と $(\mathcal{T}\text{op})_{\text{KQ}}$ が Quillen 同値であることから、イメージを掴むことができる (かも)。

⁴ Cat_{Δ} 上の Bergner モデル構造が Cartesian モデル圏でないという理由もある。

単体的集合

Joyal や Lurie は「擬圏」が $(\infty, 1)$ 圏の枠組みとして適切であることを見抜いた。⁵

定義 2.3 (単体圏)

有限線形順序集合と狭義順序を保つ写像のなす圏を単体圏 (simplex category) といい、 Δ と表す。

定義 2.4 (単体的集合)

関手 $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ を単体的集合 (simplicial set) という。単体的集合の圏を Set_{Δ} と表す。

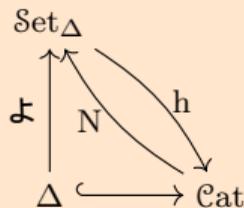
⁵Boardman と Vogt により、擬圏は弱 Kan 複体 (weak Kan complex) として調べられていたが、これが $(\infty, 1)$ 圏のモデルであることを見抜いたのは Joyal である (はず)。

単体的集合

Kan 拡張を用いて、特徴的な 2 つの随伴が得られる。

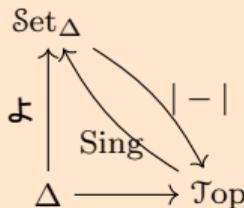
注意 2.5 (ホモトピー圏をとる関手と脈体)

埋め込み $\Delta \hookrightarrow \text{Cat}$ から Kan 拡張を用いることで、次の随伴 (h, N) が得られる。



注意 2.6 (幾何学的実現と特異単体)

関手 $\Delta[-] : \Delta \rightarrow \mathcal{T}\text{op}$ から Kan 拡張を用いることで、次の随伴 $(|-|, \text{Sing})$ が得られる。



小圏の脈体

圏論は単体的集合の特殊な場合とすることができる。

定理 2.7

脈体 $N : \text{Cat} \rightarrow \text{Set}_\Delta$ は忠実充満である。

小圏の脈体はリフト性質で特徴づけることができる。

定理 2.8

単体的集合 S に対して、次は同値である。

- S はある小圏 \mathcal{C} の脈体 $N(\mathcal{C})$ と自然同型である。
- 任意の $n \geq 2$ と $0 < i < n$ に対して、次の図式は一意的リフトを持つ。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[n, i] & \rightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta[n] & & \end{array}$$

Kan 複体

位相空間論における CW 複体に対応する単体的集合のクラスを定義する.

定義 2.9 (Kan 複体)

任意の $n \geq 2$ と $0 \leq i \leq n$ に対して, 次の図式がリフト条件を持つ単体的集合 S を Kan 複体 (Kan complex) という.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[n, i] & \rightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta[n] & & \end{array}$$

例 2.10

任意の位相空間 X に対して, 特異単体 $\text{Sing}(X)$ は Kan 複体である.

次の意味で, 位相空間のホモトピー論は単体的集合の枠組みにおいて考えてもよい.

定理 2.11 (Milnor, Giever)

- 任意の位相空間 X に対して, $|\text{Sing}(X)| \rightarrow X$ は位相空間の弱ホモトピー同値である.
- 任意の単体的集合 S に対して, $S \rightarrow \text{Sing}(|S|)$ は Kan 弱同値 (単体的集合の弱ホモトピー同値) である.

擬圏

単体的集合の枠組みにおいて、圏論は「脈体」で、位相空間のホモトピー論は「Kan 複体」によって表すことができた。これらはともにリフト性質によって特徴づけることができたが、2つの相違点がある。

- 脈体のリフトは内部角体 ($0 < i < n$) に対してのみだが、Kan 複体のリフトは外部角体 ($i = 0, n$) に対しても課す。
- 脈体のリフトは一意的だが、Kan 複体のリフトは一意性を課していない。

脈体と Kan 複体の共通の一般化として、擬圏の定義を得る。

定義 2.12 (擬圏)

任意の $n \geq 2$ と $0 < i < n$ に対して、次のリフト条件を満たす単体的集合 \mathcal{C} を擬圏 (quasi-category) という。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[n, i] & \rightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta[n] & & \end{array}$$

例 2.13

- 任意の Kan 複体は擬圏である。特に、任意の位相空間 X に対して、特異単体 $\text{Sing}(X)$ は擬圏である。
- 任意の小圏 \mathcal{C} に対して、脈体 $N(\mathcal{C})$ は擬圏である。

擬圏は $(\infty, 1)$ 圏のモデルである

擬圏において、射の合成は「可縮な空間の選択を除いて」一意に定まる。

定理 2.14 (Joyal)

単体的集合 \mathcal{C} に対して、次は同値である。

- \mathcal{C} は擬圏である。
- 包含 $\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2$ が定める単体的集合の射

$$\text{Fun}(\Delta^2, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(\Lambda_1^2, \mathcal{C})$$

は自明な *Kan* ファイブレーションである。

対象 x と y をつなぐ射のなす単体的集合を x から y への射空間とみなす。

定義 2.15 (射空間)

擬圏 \mathcal{C} の対象 x, y に対して、単体的集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) := \{x\} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^{\Delta^1} \times_{\mathcal{C}} \{y\}$ を x から y への射空間 (space of morphisms) という。

定理 2.16

擬圏 \mathcal{C} の対象 x, y に対して、単体的集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ は *Kan* 複体である。

以上から、擬圏は $(\infty, 1)$ 圏のモデルと見ることができる。

単体的空間

擬圏は脈体と Kan 複体に対する共通の一般化として、単体的「集合」の枠組みにおいて拡張条件を用いて定義された。一方、完備 Segal 空間は単体的「空間」の枠組みにおける $(\infty, 1)$ 圏のモデルである。

定義 2.17 (単体的空間)

関手 $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}_\Delta$ を単体的空間 (simplicial space) という。単体的空間の圏を sSpace と表す。

単体的集合 S の n 単体 S_n は集合であるが、単体的空間 X の n 単体 X_n は単体的集合である。

注意 2.18

積-Fun 随伴より、 $\text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \text{Set}_\Delta) \cong \text{Fun}(\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}}, \text{Set})$ が成立する。

埋め込み $\text{Set}_\Delta \hookrightarrow \text{sSpace}$ を用いて標準的単体を定義する。

定義 2.19 (単体的集合関手 (の境界))

- $\Delta[n]$ を離散単体的集合とみなすことで定める単体的空間 $F(n)$ を n 次空間関手 (n -th space functor) という。
- $\partial\Delta[n]$ を離散単体的集合とみなすことで定める単体的空間 $\partial F(n)$ を n 次空間関手の境界 (boundary of n -th space functor) という。

注意 2.20

単体的空間 X に対して、単体的集合の同型 $\text{Map}_{\text{sSpace}}(F(n), X) \cong X_n$ が存在する。

Reedy ファイブ rant

単体的空間に「空間」の性質を特徴づける条件が Reedy ファイブ rant である。

Set_Δ 上の Quillen モデル構造において, Kan 複体はファイブ rant 対象である。
このモデル構造から $s\text{Space}$ 上に Reedy モデル構造が定まる。
よって, Reedy モデル構造におけるファイブ rant 対象は「空間」のように思える。

定義 2.21 (Reedy ファイブ rant)

X を単体的空間とする。任意の $n, l \geq 0$ と $0 \leq i \leq n$ に対して, 次の単体的集合の射

$$\text{Map}_{s\text{Space}}(F(n), X) \rightarrow \text{Map}_{s\text{Space}}(\partial F(n), X)$$

が Kan ファイブレーションのとき, X を Reedy ファイブ rant (Reedy fibrant) という。

Reedy ファイブ rant の n 単体は「空間」である。

定理 2.22

Reedy ファイブ rant X に対して, X_n は Kan 複体である。

例 2.23

任意の $n \geq 0$ に対して, $F(n)$ は Reedy ファイブ rant である。

Segal 空間

Reedy ファイブランチに「圏」の性質を特徴づけるものとして、Segal 条件を定義する。
単体的集合の枠組みにおいて、圏の脈体は Segal 条件を用いて特徴づけることができる。

定理 2.24

単体的集合 S に対して、次は同値である。

- S はある小圏 \mathcal{C} の脈体 $N(\mathcal{C})$ と自然同型である。
- 任意の $n \geq 2$ に対して、 $\varphi_n : S_n \rightarrow S_1 \times_{S_0} \cdots \times_{S_0} S_1$ は同型である。

単体的集合の Segal 条件を単体的空間の枠組みにおいて考える。

定義 2.25 (Segal 空間)

X を Reedy ファイブランチとする。任意の $n \geq 2$ に対して、次の単体的集合の射

$$\varphi_n : X_n \rightarrow X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

が Kan 弱同値のとき、 X を Segal 空間 (Segal space) という。

例 2.26

任意の小圏 \mathcal{C} に対して、脈体 $N(\mathcal{C})$ は Segal 空間である。

Segal 空間における射空間

Segal 空間における対象や射を定義する.

定義 2.27 (対象)

Segal 空間 X に対して, X_0 の点を X の対象 (object) という.

定義 2.28 (射空間)

Segal 空間 X の対象 x, y に対して, 単体的集合 $\text{map}_X(x, y)$ を次のプルバックで定義し, X の射空間 (mapping space) という. $\text{map}_X(x, y)$ の元を x から y への射 (morphism) という.

$$\begin{array}{ccc} \text{map}_X(x, y) & \rightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \xrightarrow{\quad} & X_0 \times X_0 \\ (x, y) & & \end{array}$$

Segal 空間における射空間は「空間」である.

注意 2.29

Segal 空間 X の任意の対象 x, y に対して, $\text{map}_X(x, y)$ は Kan 複体である.

Segal 空間における射の合成

Segal 空間において, 射の合成は「可縮な空間の選択を除いて」一意に定まる.

補題 2.30

Segal 空間 X の任意の対象 x_0, \dots, x_n に対して, 次の単体的集合の射

$$\text{map}_X(x_0, \dots, x_n) \rightarrow \text{map}_X(x_0, x_1) \times \dots \times \text{map}_X(x_{n-1}, x_n)$$

は自明な Kan ファイブレーションである.

定義 2.31

Segal 空間 X の射 $f : x \rightarrow y, g : y \rightarrow z$ に対して, 単体的集合 $\text{comp}(f, g)$ を次のプルバックで定義する.

$$\begin{array}{ccc} \text{comp}(f, g) & \longrightarrow & \text{map}_X(x, y, z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \xrightarrow{(f, g)} & \text{map}_X(x, y) \times \text{map}_X(y, z) \end{array}$$

注意 2.32

Segal 空間 X の射 $f : x \rightarrow y, g : y \rightarrow z$ に対して, $\text{comp}(f, g)$ は可縮な Kan 複体である.

Segal 空間における射の合成

Segal 空間において, 射の合成は「ホモトピーの違いを除いて」結合的かつ単位的である.

定義 2.33 (ホモトピック)

$f, g : x \rightarrow y$ を Segal 空間 X の射とする. $f, g : \Delta^0 \rightarrow \text{map}_X(x, y)$ が単体的集合のホモトピックであるとき, f と g はホモトピック (homotopic) であるという.

定理 2.34

合成可能な射の組 f, g, h に対して, $(hg)f \sim h(gf)$ かつ $\text{id}f \sim f$, $\text{id}f \sim f$ である.

定義 2.35 (ホモトピー同値の空間)

Segal 空間 X に対して, ホモトピー同値のなす単体的部分集合を $X_{\text{hoequiv}} \subset X_1$ と表す.

完備 Segal 空間

Segal 空間において、圏の性質とホモトピー論の性質は整合的ではない。⁶

2つの対象が「Segal 空間 X においてホモトピックである」ことと、「Kan 複体 X_0 においてホモトピックである」ことを同値にする必要がある。

定義 2.36 (完備 Segal 空間)

Segal 空間 X に対して、次の単体的集合の射

$$s_0 : X_0 \rightarrow X_{\text{hoequiv}}$$

が Kan 弱同値のとき、 X は完備 (complete) であるという。

完備性は、圏論的な同型 (対象の同型) とホモトピー論的な同値 (ホモトピー同値) が 1 対 1 に対応するような条件である。

定理 2.37

小圏 \mathcal{C} に対して、脈体 $N(\mathcal{C})$ が完備であることと、 \mathcal{C} が *gaunt*⁷ であることは同値である。

⁶walking isomorphism をもつ亜群 $\{0 \leftrightarrow 1\}$ と 1 点圏 $\{*\}$ を比較するとよい。

⁷圏 \mathcal{C} が恒等射以外の同型射を持たないとき、 \mathcal{C} は *gaunt* であるという。

相対圏

今まで見たように, $(\infty, 1)$ 圏は圏論とホモトピー論の共通の一般化であった.
 よって, ホモトピーの情報を「weak equivalence の射のクラス」として持つような圏が考えられる.

定義 2.38 (相対圏)

小圏 \mathcal{C} と \mathcal{C} の wide 部分圏⁸ W の組 (\mathcal{C}, W) を相対圏 (relative category) という.

通常の圏は 2 つの極端な方法で相対圏とみなせる.

例 2.39 (極大と極小)

(\mathcal{C}, W) を相対圏とする. $W = \mathcal{C}$ のとき, (\mathcal{C}, W) は極大 (maximal) であるといい, \mathcal{C}_{\max} と表す.
 W が恒等射以外の射を含まないとき, (\mathcal{C}, W) は極小 (minimal) であるといい, \mathcal{C}_{\min} と表す.

相対圏の間の weak equivalence を保つような関手を定義する.

定義 2.40 (相対関手)

$(\mathcal{C}, W), (\mathcal{C}', W')$ を相対圏とする. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ が $F(W) \subset W'$ を満たすとき, F を相対関手 (relative functor) という.

相対圏と相対関手のなす圏を RelCat と表す. 相対半順序集合と相対関手のなす圏を RelPos と表す.

⁸圏 \mathcal{C} の対象をすべて含むような部分圏を wide 部分圏という.

半順序集合の細分化

単体的集合の重心細分と同様に、相対半順序集合の細分化を定義する。

定義 2.41 (終細分化)

相対半順序集合 \mathcal{P} に対して、相対半順序集合 $\xi_t \mathcal{P}$ を次のように定義し、 \mathcal{P} の終細分化 (terminal subdivision) という。

- $\xi_t \mathcal{P}$ の対象は RelPos における mono 射 $x : [n]_{\min} \rightarrow \mathcal{P}$ ($n \geq 0$)
- $\xi_t \mathcal{P}$ の射は次の図式を可換にするような射 $[n_1]_{\min} \rightarrow [n_2]_{\min}$

$$\begin{array}{ccc}
 [n_1]_{\min} & \longrightarrow & [n_2]_{\min} \\
 & \searrow x_1 & \swarrow x_2 \\
 & \mathcal{P} &
 \end{array}$$

- $\xi_t \mathcal{P}$ の weak equivalence は誘導される射 $x_1(n_1) \rightarrow x_2(n_2)$ が \mathcal{P} の weak equivalence であるような射

終細分化を与える対応は関手 $\xi_t : \text{RelPos} \rightarrow \text{RelPos}$ を定める。双対的に、始細分化 $\xi_i : \text{RelPos} \rightarrow \text{RelPos}$ も定義される。

定義 2.42 (2重細分化)

相対半順序集合 \mathcal{P} に対して、 $\xi^2 \mathcal{P} := \xi_t \xi_i \mathcal{P}$ を \mathcal{P} の2重細分化 (two-fold subdivision) という。

- ① 1 圏から高次圏へ
- ② $(\infty, 1)$ 圏のモデル
- ③ モデル圏論
- ④ $(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルの等価性

モデル圏とは

モデル圏

モデル圏とは、位相空間上のホモトピー論を抽象的に行うための枠組みである。

Quillen はホモトピー論を行うためには weak equivalence, fibration, cofibration の 3 つの射が重要であることを見抜き、この射の性質を公理化した。

これにより、位相空間の圏以外でもホモトピー論が行うことができるようになった。

例えば、位相空間の CW 近似や複体の projective resolution が、モデル圏におけるコファイブラント置換によって説明できる。

Quillen 同値

モデル圏 \mathcal{M} に対して、ホモトピー圏 $\text{Ho}(\mathcal{M})$ が定義される。

モデル圏の同値として、Quillen 同値がある。この同値はモデル圏として随伴であって、ホモトピー圏が圏同値であるような条件である。

よって、 $(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルが等価であるかは、2 つのモデル圏が Quillen 同値であるかで判断する。

単体的集合の圏上の Joyal モデル構造

単体的集合の圏における weak equivalence として, Kan 弱同値のほかに Joyal 弱同値がある.

定義 3.1 (Joyal 弱同値)

$f : S \rightarrow T$ を単体的集合の射とする. 任意の擬圏 \mathcal{C} に対して,

$$\mathrm{hFun}(T, \mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{hFun}(S, \mathcal{C})$$

が通常の圏同値のとき, f を Joyal 弱同値 (Joyal weak equivalence)⁹ という.

ファイブント対象がちょうど擬圏であるような Set_Δ 上のモデル構造が存在する.

定理 3.2 (Joyal モデル構造)

単体的集合の *mono* 射を *cofibration*, Joyal 同値を *weak equivalence* とするような, Set_Δ 上のモデル構造が存在する. このモデル構造を Set_Δ 上の Joyal モデル構造といい, $(\mathrm{Set}_\Delta)_{\mathrm{Joyal}}$ と表す.

定理 3.3

$(\mathrm{Set}_\Delta)_{\mathrm{Joyal}}$ におけるファイブント対象はちょうど擬圏である.

⁹一般には, (弱) 圏同値 ((weak) categorical equivalence) と呼ばれる.

単体的空間の圏上の Rezk モデル構造

定義 3.4 (Rezk 弱同値)

$f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする. 任意の完備 Segal 空間 W に対して,

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{sSpace}}(Y, W) \rightarrow \mathrm{Map}_{\mathrm{sSpace}}(X, W)$$

が Kan 弱同値のとき, f を Rezk 弱同値 (Rezk weak equivalence) という.

ファイブランチ対象がちょうど完備 Segal 空間であるような sSpace 上のモデル構造が存在する.

定理 3.5 (Rezk モデル構造)

単体的空間の *mono* 射を *cofibration*, Rezk 弱同値を *weak equivalence* とするような, sSpace 上のモデル構造が存在する. このモデル構造を sSpace 上の Rezk モデル構造といい, $(\mathrm{sSpace})_{\mathrm{Rezk}}$ と表す.¹⁰

定理 3.6

$(\mathrm{sSpace})_{\mathrm{Rezk}}$ におけるファイブランチ対象はちょうど完備 Segal 空間である.

¹⁰一般には, $(\mathrm{sSpace})_{\mathrm{Rezk}}$ は $(\mathrm{sSpace})_{\mathrm{Reedy}}$ の Bousfield 局所化を用いて定義される.

相対圏の圏上の Barwick-Kan モデル構造

随伴によってモデル構造がリフトされる. この定理を用いて, 相対圏の圏上のモデル構造を定義する.

定理 3.7

\mathcal{C} をコファイブ rant 生成なモデル圏, $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$ を随伴とする. (F, G) がいい条件を満たすとき, 次のような \mathcal{D} 上のモデル構造が存在する.

- *weak equivalence* は G での像が \mathcal{C} における *weak equivalence* となるような \mathcal{D} の射
- *fibration* は G での像が \mathcal{C} における *fibration* となるような \mathcal{D} の射

随伴 (N_ξ, K_ξ) を用いて, $(\text{sSpace})_{\text{Reedy}}$ から RelCat 上にモデル構造をリフトすることができる.

定理 3.8 (Barwick-Kan モデル構造)

N_ξ の像が *Reedy* 弱同値である相対関手を *weak equivalence*, N_ξ の像が *Reedy* ファイブレーションであるような相対関手を *fibration* とするよう, RelCat 上のモデル構造が存在する.

このモデル構造を RelCat 上の *Barwick-Kan* モデル構造といい, $(\text{RelCat})_{\text{BK}}$ と表す.

- ① 1 圏から高次圏へ
- ② $(\infty, 1)$ 圏のモデル
- ③ モデル圏論
- ④ $(\infty, 1)$ 圏の理論のモデルの等価性

位相的圏と単体的圏の等価性

幾何学的実現と特異単体の随伴は豊穡圏の間の随伴にリフトする.

注意 4.1

随伴 $|-| : \text{Set}_\Delta \rightleftarrows \text{Top} : \text{Sing}$ は, 随伴 $|-| : \text{Cat}_\Delta \rightleftarrows \text{Cat}_{\mathcal{T}\text{op}} : \text{Sing}$ を定める.

本質的には次の命題から従う.

定理 4.2

いいモノイダルモデル圏の Quillen 随伴 $F : \mathbf{A} \rightleftarrows \mathbf{A}' : G$ は, Quillen 随伴 $F : (\text{Cat}_{\mathbf{A}})_{\text{Berg}} \rightleftarrows (\text{Cat}_{\mathbf{A}'})_{\text{Berg}} : G$ を定める.
更に, Quillen 同値からは Quillen 同値が定まる.

Cat_Δ と $\text{Cat}_{\mathcal{T}\text{op}}$ は Bergner モデル構造として Quillen 同値である.

定理 4.3 ([Bergner, 2005])

随伴 $|-| : \text{Cat}_\Delta \rightleftarrows \text{Cat}_{\mathcal{T}\text{op}} : \text{Sing}$ は次の Quillen 同値を定める.

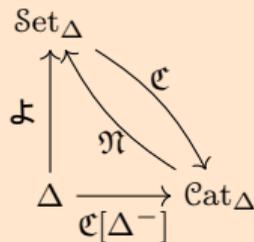
$$|-| : (\text{Cat}_\Delta)_{\text{Berg}} \rightleftarrows (\text{Cat}_{\mathcal{T}\text{op}})_{\text{Berg}} : \text{Sing}$$

擬圏と位相的圏の等価性

Set_Δ と Cat_Δ の随伴を Kan 拡張を用いて構成する.

注意 4.4

関手 $\mathfrak{C}[\Delta^-] : \Delta \rightarrow \text{Cat}_\Delta$ を $\mathfrak{C}[\Delta^-]([n]) := \mathfrak{C}[\Delta^n]$ で定義する. Kan 拡張から, 次の随伴 $(\mathfrak{C}, \mathfrak{N})$ が得られる.



定理 4.5 ([Bergner, 2007])

随伴 $\mathfrak{C} : \text{Set}_\Delta \rightleftarrows \text{Cat}_\Delta : \mathfrak{N}$ は次の Quillen 同値を定める.

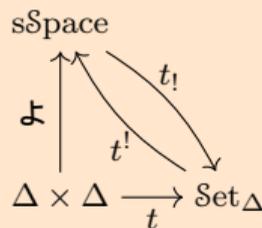
$$\mathfrak{C} : (\text{Set}_\Delta)_{\text{Joyal}} \rightleftarrows (\text{Cat}_\Delta)_{\text{Berg}} : \mathfrak{N}$$

完備 Segal 空間と擬圏の等価性

sSpace と Set_Δ の随伴を Kan 拡張を用いて構成する.

注意 4.6

$[n]$ により自由生成される亜群の脈体を $\Delta'[n]$ と表す. 関手 $t : \Delta \times \Delta \rightarrow \text{Set}_\Delta$ を $t([m], [n]) := \Delta[m] \times \Delta'[n]$ で定義する. Kan 拡張から, 次の随伴 $(t_!, t^!)$ が得られる.



定理 4.7 ([Joyal and Tierney, 2006])

随伴 $(t_!, t^!)$ は次の Quillen 同値を定める.

$$t_! : (\text{sSpace})_{\text{Rezk}} \rightleftarrows (\text{Set}_\Delta)_{\text{Joyal}} : t^!$$

完備 Segal 空間と相対圏の等価性

sSpace と RelCat の随伴を Kan 拡張を用いて構成する.

注意 4.8

関手 $[-]_{m,m}^{\xi} : \Delta \times \Delta \rightarrow \text{RelCat}$ を $[-]_{m,m}^{\xi}([n], [m]) := \xi([n]_{\min} \times [m]_{\max})$ で定義する.
Kan 拡張から, 次の随伴 (K_{ξ}, N_{ξ}) が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{sSpace} & & \\
 \uparrow & \searrow^{K_{\xi}} & \\
 \text{よ} & & \text{RelCat} \\
 \uparrow & \searrow^{N_{\xi}} & \\
 \Delta \times \Delta & \xrightarrow{[-]_{m,m}^{\xi}} &
 \end{array}$$

定理 4.9 ([Barwick and Kan, 2011])

随伴 (K_{ξ}, N_{ξ}) は次の Quillen 同値を定める.

$$K_{\xi} : (\text{sSpace})_{\text{Rezk}} \rightleftarrows (\text{RelCat})_{\text{BK}} : N_{\xi}$$

まとめ

本稿で紹介した Quillen 同値をまとめる.

次の Quillen 同値の列が存在する. (上矢印が左 Quillen 同値)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \xleftarrow{K_\xi} & & \xrightarrow{t!} & & \xrightarrow{\mathfrak{c}} & & \xrightarrow{|\cdot|} \\
 (\mathcal{R}elCat)_{BK} & & (s\mathcal{S}pace)_{Rezk} & & (Set_\Delta)_{Joyal} & & (Cat_\Delta)_{Berg} & & (Cat_{\mathcal{T}op})_{Berg} \\
 & \xrightarrow{N_\xi} & & \xleftarrow{t!} & & \xleftarrow{\mathfrak{N}} & & \xleftarrow{Sing} &
 \end{array}$$

参考文献 I

- [Barwick and Kan, 2011] Barwick, C. and Kan, D. M. (2011).
Relative categories: Another model for the homotopy theory of homotopy theories.
- [Bergner, 2005] Bergner, J. E. (2005).
A model category structure on the category of simplicial categories.
- [Bergner, 2007] Bergner, J. E. (2007).
Three models for the homotopy theory of homotopy theories.
[Topology](#), 46(4):397–436.
- [Joyal and Tierney, 2006] Joyal, A. and Tierney, M. (2006).
Quasi-categories vs segal spaces.