モノイダル圏への関手を用いた代数の構成について

第五回すうがく徒のつどい
yohhey
2024 年 3 月 31 日

今日のお品書き

モノイダル圏における代数と余代数

ホップ加群の圏とハイゼンベルグダブル

Yetter-Drinfel'd 加群の圏とドリンフェルトダブル

${}_H\mathcal{M}^H$ の左 ${}_H\mathcal{YD}^H$-module category 構造と $H(H)$ の右 D(H^*)-comodule algebra 構造について

概要その 1

- モノイダル圏において，代数およびその双対概念である余代数が定義できる．また，通常の代数系と同様に，代数上の加群および，その双対概念である余代数上の余加群が定義でき，これらは圏をなす．
- モノイダル圏 $\mathcal{D}$ への関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ がある種の表現可能性を満たすとき，関手 F から $\mathcal{D}$ における代数 A_F や $\mathcal{D}$ における余代数 C_F を取り出すことができる．
- 上記の構成において，特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vect}_k$ で A_F, C_F がともに存在するとき，${C_F}^* \cong A_F$ が成立する．

概要その 2

- 代数と余代数の構造を整合的に合わせ持つ代数を双代数といい，更に antipode という反代数射が存在するとき，ホップ代数という．
- ホップ代数 H はその定義から，H 上の加群および余加群を定義することができる．ベクトル空間でかつ，H 上の加群構造と余加群構造を整合的に併せ持つ加群をホップ加群という．
- ホップ加群の圏 ${}_H\mathcal{M}^H$ からベクトル空間の圏 $\mathbf{Vect}_k$ への忘却関手 $F\colon {}_H\mathcal{M}^H \to \mathbf{Vect}_k$ から，代数 A_F を取り出すことができるが，実はこの代数はハイゼンベルグダブル $\mathcal{H}(H)$ である．

概要その 3

- モノイダル圏 $\mathcal{C}$ からブレイドモノイダル圏 $\mathcal{D}$ へのモノイダル関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が，ある種の表現可能性を満たすとき，関手 F から $\mathcal{D}$ における双代数を取り出すことができる．
- モノイダル圏 $\mathcal{C}$ からブレイドモノイダル圏 $\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$ を作り出す自然な操作 (right Drinfel'd center) が存在する．
- 特に有限次元ホップ代数 H に対して，$\mathcal{Z}_r({}_H\mathcal{M})$ は Yetter-drinfel'd 加群の圏 ${}_H\mathcal{YD}^H$ とブレイドモノイダル圏として同値である．
- 忘却関手 $F\colon {}_H\mathcal{YD}^H \to \mathbf{Vect}_k$ から，代数 A_F を取り出すことができるが，実はこの代数はドリンフェルトダブル $D(H^*)$ である．
- ${}_H\mathcal{M}^H$ には自然なモノイダル構造は存在しないが，${}_H\mathcal{YD}^H$ はブレイドモノイダル圏で，忘却関手 F はモノイダル関手である．このデータから $D(H^*)$ はさらに準三角ホップ代数の構造を持つ．($H(H)$ にはこのような構造は存在しない)

概要その 4

- 環 R 上の加群 M のアナロジーとして，モノイダル圏 $\mathcal{C}$ の圏 $\mathcal{M}$ への右作用 $\triangleleft\colon \mathcal{M} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ が定義できる．このとき，$\mathcal{M}$ を右 $\mathcal{C}$ 加群という．
- ホップ代数 H に対して，${}_H\mathcal{M}^H$ は右 ${}_H\mathcal{YD}^H$ 加群の構造を持つ．また以下の図式の可換性より，$H(H)$ の $D(H^*)$-comodule algebra 構造が得られる．(この構成の左右を全て入れ替えると [Lu94] の結果が得られる)

$$\begin{tikzcd}
{}_H\mathcal{M}^H \times {}_H\mathcal{YD}^H \arrow[rr, "\triangleleft"] \arrow[dr, "F\otimes G"'] & & {}_H\mathcal{M}^H \arrow[dl, "F"] \\
& \mathbf{Vect}_k &
\end{tikzcd}$$

モノイダル圏における代数と余代数

定義 2.1 (自然変換)

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とし，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．$X \in \mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{D}$ の射 $\alpha_X \colon F(X) \to G(X)$ が定まっているとする．(これを $\alpha \colon F \to G$ と書く) 任意の $\mathcal{C}$ の射 $f \colon X \to Y$ に対して以下の図式が可換となるとき，α は自然変換 (natural transformation)であるという．

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ G(X) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array}$$

また，任意の X に対して，α_X が同型射となるとき，α は自然同型 (natural isomorphism)であるという

定義 2.2 (モノイダル圏)

$\mathcal{C}$ を圏，$\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ を関手，$a\colon (-\otimes-)\otimes- \to -\otimes(-\otimes-)$ を自然同型とする．また，I を $\mathcal{C}$ の対象，
$l\colon I\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, r\colon\ \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \otimes I \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ を自然同型とする．
$(\mathcal{C},\otimes,a,I,l,r)$ が以下の 2 条件を満たすとき，
モノイダル圏 (monoidal category)であるという．また a を結合子 (associator)，l,r をそれぞれ左単位子 (left unit)，右単位子 (right unit)，I を単位対象 (unit object)という．

(pentagon axiom)

任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z, W に対して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y, Z, W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X, Y \otimes Z, W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

(triangle axiom)

任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y に対して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes \mathrm{id}_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{id}_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

$\otimes$ の関手性が意味すること

注意 2.3

$\mathcal{C}$ の射 $f_1 \colon X_1 \to Y_1, f_2 \colon X_2 \to Y_2, g_1 \colon Y_1 \to Z_1, g_2 \colon Y_2 \to Z_2$（$(f_1, f_2), (g_1, g_2)$ は $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の射とみなせる）を任意にとる．$\otimes$ は $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の射 (f_1, f_2) に対して，$\mathcal{C}$ の射 $f_1 \otimes f_2 \colon X_1 \otimes X_2 \to Y_1 \otimes Y_2$ を対応させる関手で，$\mathrm{id}_{X \otimes X} = \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_X$ および，$(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$ を満たす．

$$\begin{tikzcd} X_1 \otimes X_2 \arrow[r, "f_1 \otimes f_2"] \arrow[rr, bend right, "(g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)"'] & Y_1 \otimes Y_2 \arrow[r, "g_1 \otimes g_2"] & Z_1 \otimes Z_2 \end{tikzcd}$$

a の自然変換性が意味すること

注意 2.4

$(- \otimes -) \otimes -, - \otimes (- \otimes -)$ は $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への関手で，$a\colon (- \otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -)$ はその間の自然同型である．$\mathcal{C}$ の任意の射の組 $f_1\colon X_1 \to Y_1, f_2\colon X_2 \to Y_2, f_3\colon X_3 \to Y_3$（これは $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の射とみなせる）に対して，a は以下の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 \arrow[r, "(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3"] \arrow[d, "a_{X_1, X_2, X_3}"'] & (Y_1 \otimes Y_2) \otimes Y_3 \arrow[d, "a_{Y_1, Y_2, Y_3}"] \\
X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3) \arrow[r, "f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3)"'] & Y_1 \otimes (Y_2 \otimes Y_3)
\end{tikzcd}$$

注意 2.5

$I \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \otimes I, \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への関手で，
$l \colon I \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}, r \colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \otimes I \to \mathcal{C}$ はその間の自然同型である．$\mathcal{C}$ の任意の射 $f \colon X \to Y$ に対して，l, r はそれぞれ左と右の図式を可換にする．

$$
\begin{array}{ccc}
I \otimes X & \xrightarrow{\mathrm{id}_I \otimes f} & I \otimes Y \\
{\scriptstyle l_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_Y} \\
X & \xrightarrow[f]{} & Y
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
X \otimes I & \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_I} & Y \otimes I \\
{\scriptstyle r_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_Y} \\
X & \xrightarrow[f]{} & Y
\end{array}
$$

例 2.6

Set を集合と写像のなす圏とする．このとき以下のようにして，**Set** にモノイダル圏の構造が入る．

- $\times\colon \mathbf{Set}\times\mathbf{Set}\to\mathbf{Set}$ を集合の直積をとる関手とする．
- 集合 X, Y, Z に対して，
  $a_{X,Y,Z}\colon (X\times Y)\times Z \ni ((x,y),z)\mapsto (x,(y,z))\in X\times(Y\times Z)$
  として結合子を定める．
- $I=\{*\}$（一点集合）とし，集合 X に対して，
  $r_X\colon X\times I\ni (x,*)\mapsto x\in X, l_X\colon I\times X\ni(*,x)\mapsto x\in X$ として左単位子，右単位子を定める．

例 2.7

k-ベクトル空間の圏を $\mathbf{Vect}_k$ と書くことにする．このとき，以下のようにして，$\mathbf{Vect}_k$ にモノイダル圏の構造が入る．

- $\otimes_k \colon \mathbf{Vect}_k \times \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Vect}_k$ を k 上のテンソル積をとる関手とする．
- ベクトル空間 X, Y, Z に対して，
$a_{X,Y,Z} \colon (X \otimes_k Y) \otimes_k Z \ni (x \otimes_k y) \otimes_k z \mapsto x \otimes_k (y \otimes_k z) \in X \otimes_k (Y \otimes_k Z)$ として結合子を定める．
- $I = k$ とし，ベクトル空間 X に対して，
$r_X \colon X \otimes_k k \ni x \otimes_k \alpha \mapsto \alpha x \in X, l_X \colon k \otimes_k X \ni \alpha \otimes_k x \mapsto \alpha x \in X$ として左単位子，右単位子を定める．

定義 2.8 (モノイダル圏における代数)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とする．$\mathcal{C}$ の対象 A と，射 $\mu_A \colon A \otimes A \to A, \eta_A \colon I \to A$ により以下の図式が可換となるとき，(A, μ_A, η_A) は $\mathcal{C}$ の代数 (algebra)であるという．

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[rr, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "\mu_A \otimes \mathrm{id}_A"'] & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \mu_A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "\mu_A"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes A \arrow[r, "\eta_A \otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"'] & A \otimes I \arrow[l, "\mathrm{id}_A \otimes \eta_A"'] \arrow[dl, "r_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Set における代数

例 2.9

Set における代数は，よく知られた対象である．

- Set の対象 A で，$\mu_A\colon A \times A \to A, \eta_A\colon \{*\} \to A$ という写像を持つものを考える．$\eta_A(*) = 1_A$ と表記することにする．また，$\mu_A((a,b)) = a \bullet b$ と表記することにする．
- (A, μ_A, η_A) が Set における代数となるには，任意の $a, b, c \in A$ に対して，$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c), 1_A \bullet a = a \bullet 1_A = a$ が成り立てばよい．
- これらの条件より，A が Set における代数であるとは，A がモノイドであることと等しい．

$\mathbf{Vect}_k$ における代数

例 2.10

$\mathbf{Vect}_k$ における代数も，よく知られた対象である．

- $\mathbf{Vect}_k$ の対象 A で，$\mu_A\colon A \otimes A \to A, \eta_A\colon k \to A$ という k-線型写像を持つものを考える．$\eta_A(1_k) = 1_A$ と表記することにする．また，$\mu_A(a \otimes b) = ab$ と表記することにする．
- (A, μ_A, η_A) が $\mathbf{Vect}_k$ における代数となるには，任意の $a, b, c \in A$ に対して，$(ab)c = a(bc), 1_A a = a 1_A = a$ が成り立てばよい．
- これらの条件より，A が $\mathbf{Vect}_k$ における代数であるとは，A が k-代数であることと等しい．

定義 2.11 (代数上の加群)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，(A, μ_A, η_A) を $\mathcal{C}$ 上の代数，M を $\mathcal{C}$ の対象，$\lambda_M : A \otimes M \to M$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の図式が可換となるとき (M, λ_M) は A 上の左加群 (left A-module)であるという．

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes M \arrow[rr, "a_{A,A,M}"] \arrow[d, "\mu_A \otimes 1_M"'] & & A \otimes (A \otimes M) \arrow[d, "1_A \otimes \lambda_M"] \\
A \otimes M \arrow[r, "\lambda_M"'] & A & A \otimes M \arrow[l, "\lambda_M"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[r, "\eta_A \otimes 1_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\lambda_M"] \\
 & M
\end{tikzcd}$$

定義 2.12 (代数上の加群の圏)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，(A, μ_A, η_A) を $\mathcal{C}$ 上の代数，$(M, \lambda_M), (N, \lambda_N)$ を A 上の左加群，$f : M \to N$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の図式が可換となるとき f は A 上の左加群の射 (morphism of left A-modules)であるという．

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{1_A \otimes f} & A \otimes N \\ {\scriptstyle \lambda_M}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \lambda_N} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

また，A 上の左加群を対象，A 上の左加群の射を射とすると，圏をなす．この圏を A 上の左加群の圏 (category of left A-modules) といい，${}_A\mathcal{M}$ と表す．

定義 2.13 (モノイダル圏における余代数)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とする．$\mathcal{C}$ の対象 C と，射 $\Delta_C : C \to C \otimes C, \varepsilon_C : C \to I$ により以下の図式が可換となるとき，$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ は $\mathcal{C}$ の余代数 (coalgebra)であるという．

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "\Delta_C \otimes 1_C"'] & C \arrow[l, "\Delta_C"'] \arrow[r, "\Delta_C"] & C \otimes C \arrow[d, "1_C \otimes \Delta_C"] \\
(C \otimes C) \otimes C \arrow[rr, "a_{C,C,C}"'] & & C \otimes (C \otimes C)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "l_A"'] \arrow[d, "\mu_A"] \arrow[dr, "r_A"] & \\
I \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon_C \otimes 1_C"] \arrow[r, "1_C \otimes \epsilon_C"'] & C \otimes I
\end{tikzcd}$$

定義 2.14 (余代数上の余加群)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ を $\mathcal{C}$ 上の余代数，M を $\mathcal{C}$ の対象，$\rho_M : M \to M \otimes C$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の図式が可換となるとき (M, ρ_M) は C 上の
右余加群 (right C-comodule)であるという．

$$
\begin{tikzcd}
(M \otimes C) \otimes C \arrow[rr, "a_{M,C,C}"] & & M \otimes (C \otimes C) \\
M \otimes C \arrow[u, "\rho_M \otimes 1_C"] & M \arrow[l, "\rho_M"'] \arrow[r, "\rho_M"'] & M \otimes C \arrow[u, "1_M \otimes \Delta_C"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes C \arrow[r, "1_M \otimes \epsilon_C"] & M \otimes I \\
M \arrow[u, "\rho_M"] \arrow[ur, "r_M^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

定義 2.15 (余代数上の余加群の圏)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ を $\mathcal{C}$ 上の余代数，$(M, \rho_M), (N, \rho_N)$ を C 上の右余加群，$f : M \to N$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の左の図式が可換となるとき f は C 上の右余加群の射 (morphism of right C-comodules)であるという．

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle \rho_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_N} \\ M \otimes C & \xrightarrow[f \otimes 1_C]{} & N \otimes C \end{array}$$

また，C 上の右余加群を対象，C 上の右余加群の射を射とすると，圏をなす．この圏を C 上の右余加群の圏 (category of right C-comodules)といい，$\mathcal{M}^C$ と表す．

定理 2.16

$\mathcal{C}$ を圏，$\mathcal{D}$ をモノイダル圏，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．
$\mathrm{Nat}(- \otimes F, F)$ が $A_F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ により表現可能であるとき，A_F は $\mathcal{D}$ における代数となる．また，関手 $G\colon \mathcal{C} \to_{A_F} \mathcal{M}$ が存在して，以下の図式が可換となる．ただし，$U\colon {}_{A_F}\mathcal{M} \to \mathcal{D}$ は忘却関手である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "F"'] & & {}_{A_F}\mathcal{M} \arrow[dl, "U"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

証明の概要

- 表現可能性より，自然同型 $\theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, A_F) \to \mathrm{Nat}(- \otimes F, F)$ が存在する．
- $\theta_{A_F}(\mathrm{id}_{A_F}) = \varphi$ とし，$\mu_{A_F} = \theta^{-1}_{A_F^{\otimes 2}}(\varphi \circ (\mathrm{id}_{A_F} \otimes \varphi) \circ a_{A_F, A_F, F})$ とする．μ_{A_F} は A_F の積となる．
- $l_F\colon I \otimes F \to F$ は自然変換であり，$\eta_{A_F} = {\theta_I}^{-1}(l_F)\colon I \to A_F$ とすると，A_F の単位射となる．
- 結合律・単位律は可換図式を書けば証明できる．
- 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して，$\varphi_X\colon A_F \otimes F(X) \to F(X)$ により $F(X)$ は左 A_F 加群となる．

証明の鍵となる図式

$\mu_{A_F} = \theta^{-1}_{A_F^{\otimes 2}}(\varphi \circ (\mathrm{id}_{A_F} \otimes \varphi) \circ a_{A_F, A_F, F})\colon A_F \otimes A_F \to A_F$ は $\mathcal{D}$ の射なので，θ の自然性より，以下の図式は可換となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A_F, A_F) \arrow[rr, "{\mu_{A_F}}^*"] \arrow[d, "\theta_{A_F}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A_F, A_F) \arrow[d, "\theta_{A_F \otimes A_F}"] \\
\mathrm{Nat}(A_F \otimes F, F) \arrow[rr, "{\mu_{A_F}}^*"'] & & \mathrm{Nat}((A_F \otimes A_F) \otimes F, A_F)
\end{tikzcd}$$

上記の図式の可換性より，以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
(A_F \otimes A_F) \otimes F \arrow[rr, "a_{A_F, A_F, F}"] \arrow[d, "\mu_{A_F} \otimes \mathrm{id}_F"'] & & A_F \otimes (A_F \otimes F) \arrow[d, "\mathrm{id}_{A_F} \otimes \varphi"] \\
A_F \otimes F \arrow[r, "\varphi"'] & F & A_F \otimes F \arrow[l, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & A_F \otimes (A_F \otimes F) \arrow[dddddlll, bend right] \arrow[dddddrrr, bend left] & & & \\
 & & (A_F \otimes A_F) \otimes F \arrow[ur] \arrow[ddddll, bend right] & & & & \\
 & & (A_F \otimes A_F) \otimes (A_F \otimes F) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dl] & A_F \otimes (A_F \otimes (A_F \otimes F)) \arrow[uu] & A_F \otimes ((A_F \otimes A_F) \otimes F) \arrow[l] \arrow[dr] & & \\
 & A_F \otimes (A_F \otimes F) \arrow[ddl] & ((A_F \otimes A_F) \otimes A_F) \otimes F \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[d, "(\mu_{A_F} \otimes \mathrm{id}_{A_F}) \otimes \mathrm{id}_F"] & & (A_F \otimes (A_F \otimes A_F)) \otimes F \arrow[u] \arrow[d, "(\mathrm{id}_{A_F} \otimes \mu_{A_F}) \otimes \mathrm{id}_F"'] & A_F \otimes (A_F \otimes F) \arrow[ddr] & \\
 & & (A_F \otimes A_F) \otimes F \arrow[ul] \arrow[r, "\mu_{A_F} \otimes \mathrm{id}_F"'] & A_F \otimes F \arrow[d, "\varphi"] & (A_F \otimes A_F) \otimes F \arrow[l, "\mu_{A_F} \otimes \mathrm{id}_F"] \arrow[ur] & & \\
A_F \otimes F \arrow[rrr, "\varphi"'] & & & F & & & A_F \otimes F \arrow[lll, "\varphi"]
\end{tikzcd}
$$

定理 2.17

$\mathcal{C}$ を圏，$\mathcal{D}$ をモノイダル圏，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．$\mathrm{Nat}(F, F \otimes -)$ が $C_F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ により表現可能であるとき，C_F は $\mathcal{D}$ における余代数となる．また，関手 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{C_F}$ が存在して，以下の図式が可換となる．ただし，$U\colon \mathcal{M}^{C_F} \to \mathcal{D}$ は忘却関手である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{M}^{C_F} \arrow[dl, "U"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

注意 2.18

定理 *2.16* において，特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vect}_k$ のときは，自然同型 $\theta\colon \mathrm{Hom}_k(-, A_F) \to \mathrm{Nat}(- \otimes F, F)$ において，$\theta_k\colon A_F \cong \mathrm{Hom}_k(k, A_F) \to \mathrm{Nat}(k \otimes F, F) \cong \mathrm{Nat}(F, F) = \mathrm{End}(F)$ より A_F と $\mathrm{End}(F)$ は一対一に対応する．簡単な考察から，A_F の k 代数構造と $\mathrm{End}(F)$ を自然変換の合成を積として k 代数とみなしたものは同型であることが分かる．

注意 2.19

定理**??**において，特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vect}_k$ のときは，自然同型 $\theta\colon \mathrm{Hom}_k(C_F, -) \to \mathrm{Nat}(F, F \otimes -)$ において，$\theta_k\colon {C_F}^* \cong \mathrm{Hom}_k(C_F, k) \to \mathrm{Nat}(F, F \otimes k) \cong \mathrm{Nat}(F, F) = \mathrm{End}(F)$ より ${C_F}^*$ と $\mathrm{End}(F)$ は一対一に対応する．F が定理 *2.16* の条件も満たしているとき，${C_F}^* \cong A_F$ であることが分かる．

モノイダル圏への関手からの代数・余代数の構成まとめ

- モノイダル圏上に代数・余代数が定義できる．**Set** の代数はモノイド，$\mathbf{Vect}_k$ の代数は k 代数である．
- モノイダル圏の代数 A に対して，A 上の左加群の圏 ${}_A\mathcal{M}$ が定義できる．
- モノイダル圏の余代数 C に対して，C 上の右余加群の圏 $\mathcal{M}^C$ が定義できる．
- モノイダル圏 $\mathcal{D}$ への関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ がある種の表現可能性を満たすとき，関手 F から $\mathcal{D}$ における代数 A_F や $\mathcal{D}$ における余代数 C_F を取り出すことができる．
- 特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vect}_k$ で表現可能性に関する条件を満たしているとき，$A_F \cong \mathrm{End}(F)$ や ${C_F}^* \cong A_F$ が成立する．

ホップ加群の圏とハイゼンベルグダブル

ホップ代数の定義

定義 3.1 (ホップ代数)

(H, μ_H, η_H) を k 代数とし，$(H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ を k 余代数とする．
$\Delta_H : H \to H \otimes H, \varepsilon_H : H \to k$ が k 代数の射であるとき，
$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ をk 上の双代数 (bialgebra over k)という．
また k 線型写像 $S_H \colon H \to H$ が以下の図式を満たすとき，
$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ を
k 上のホップ代数 (Hopf algebra over k)という．

$$
\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[r, "S_H \otimes \mathrm{id}_H"] & H \otimes H \arrow[dr, "\mu_H"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta_H"] \arrow[rrr, "\eta_H \circ \varepsilon_H"] \arrow[dr, "\Delta_H"'] & & & H \\
 & H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id}_H \otimes S_H"'] & H \otimes H \arrow[ur, "\mu_H"'] &
\end{tikzcd}
$$

ホップ代数の例

例 3.2 (群環)

G を群とし，$k[G]$ を群環とする．$g \in G$ に対して，$\Delta_{k[G]}(g) = g \otimes g, \varepsilon(g) = 1, S(g) = g^{-1}$ とすると，$k[G]$ はホップ代数となる．

例 3.3 (普遍展開環)

$\mathfrak{g}$ をリー代数，$U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍展開環とする．$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$\Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes 1, \varepsilon(X) = 0, S(X) = -X$ とすると，$U(\mathfrak{g})$ はホップ代数となる．

注意 3.4 (Sweedler 記法)

C を k 余代数，M を C 上の右余加群とするとき，$\Delta_C : C \to C \otimes C$ を $\Delta(c) = \sum_{(c)} c_1 \otimes c_2$ と表す．ここで $\sum_{(c)}$ は c を代入した時に出てくる全ての和をとることを意味する．また $\rho_M : M \to M \otimes C$ についても，$\rho_M(m) = \sum_{(m)} m_0 \otimes m_1$ と書き，m_0 は和に出てくるテンソル積の M に含まれる部分，m_1 は C に含まれる部分とする．

以降 Sweedler 記法における $\sum$ を省略する．

例 3.5

ホップ代数 H をとり，$h \in H$ とする．S_H の満たすべき条件を Sweedler 記法を用いて表すと，以下のように書ける．

$$S_H(h_1)h_2 = h_1 S_H(h_2) = \varepsilon_H(h) 1_H$$

H^* のホップ代数構造

注意 3.6

H を有限次元ホップ代数とする．$f, g \in H^*$ とし，以下のように H^* にホップ代数構造を定める．

$$\mu_{H^*}(f \otimes g) = f * g = (f \otimes g) \circ \Delta_H$$

$$\Delta_{H^*}(f) = f_1 \otimes f_2 = f \circ \mu_H$$

$$\eta_{H^*}(1_k) = \varepsilon_H, \quad \varepsilon_{H^*}(f) = f(1_H), \quad S_{H^*}(f) = f \circ S_H$$

注意 3.7

H を有限次元ホップ代数とするとき，$h \in H, f \in H^*$ に対して，h の f への左作用 $h \rightharpoonup f$，右作用 $f \leftharpoonup h$，f の h への左作用 $f \rightharpoonup h$，右作用 $h \leftharpoonup f$ を以下のように定める．

$$h \rightharpoonup f = f_2(h)f_1, \quad f \leftharpoonup h = f_1(h)f_2$$

$$f \rightharpoonup h = f(h_2)h_1, \quad h \leftharpoonup f = f(h_1)h_2$$

定義 3.8 (ホップ加群の圏)

H をホップ代数とし，(M, λ_M) を左 H 加群，(M, ρ_M) を右 H 余加群とする．任意の H の元 h と M の元 m に対して以下が成立するとき，(M, λ_M, ρ_M) はホップ加群 (Hopf module)であるという．

$$(h \triangleright m)_0 \otimes (h \triangleright m)_1 = h_1 \triangleright m_0 \otimes h_2 \cdot m_1$$

$(M, \lambda_M, \rho_M), (N, \lambda_N, \rho_N)$ をホップ加群とする．$f \colon M \to N$ が左 H 加群の射でかつ，右 H 余加群の射であるとき，ホップ加群の射であるという．ホップ加群とホップ加群の射からなる圏をホップ加群の圏といい，${}_H\mathcal{M}^H$ と表す．

補題 3.9

H を有限次元ホップ代数とする．

$$-\otimes H\colon {}_H\mathcal{M} \ni (M, \lambda_M) \mapsto (M \otimes H, \lambda_{M\otimes H}, \rho_{M\otimes H}) \in {}_H\mathcal{M}^H$$

を以下のように定めると，$-\otimes H$ は関手となる．

$$\lambda_{M\otimes H}(h \otimes m \otimes a) = h \triangleright (m \otimes a) = h_1 \triangleright m \otimes h_2 \cdot a$$

$$\rho_{M\otimes H}(m \otimes a) = (m \otimes a)_0 \otimes (m \otimes a)_1 = m \otimes a_1 \otimes a_2$$

準備その 2

補題 3.10

H を有限次元ホップ代数とし，(M, λ_M, ρ_M) をホップ加群とする．このとき $\rho_M\colon M \to M \otimes H$ は ${}_H\mathcal{M}^H$ の射である．ただし，$M \otimes H$ のホップ加群構造は補題 *3.9* で定義されたものとする．

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & M \otimes H \arrow[d, "\rho_{M\otimes H}"] \\
M \otimes H \arrow[r, "\rho_M \otimes \mathrm{id}_H"'] & M \otimes H \otimes H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \otimes M \arrow[r, "\mathrm{id}_H \otimes \rho_M"] \arrow[d, "\lambda_M"'] & H \otimes M \otimes H \arrow[d, "\lambda_{M\otimes H}"] \\
M \arrow[r, "\rho_M"'] & M \otimes H
\end{tikzcd}
$$

補題 3.11

V を k 線形空間とし，H を有限次元 k 線形空間とする．このとき，$\mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*) \cong \mathrm{Hom}_k(V \otimes H, H)$ である．

注意 3.12

H の基底を $\{\boldsymbol{e}_i\}$ とし，その双対基底を $\{\boldsymbol{e}^i\}$ とする．また，$f = f^1 \otimes f^2 \in \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*), g \in \mathrm{Hom}_k(V \otimes H, H), v \in V, h \in H$ とする．上記の補題の同型射
$\Phi\colon \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*) \to \mathrm{Hom}_k(V \otimes H, H)$ と
$\Psi\colon \mathrm{Hom}_k(V \otimes H, H) \to \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*)$ を明示的に表すと次の形となることが分かる．

$$\Phi(f)(v \otimes h) = f^2(v)(h) f^1(v)$$

$$\Psi(g)(v) = \sum_i g(v \otimes \boldsymbol{e}_i) \otimes \boldsymbol{e}^i$$

命題 3.13

H を有限次元ホップ代数とし，$F\colon {}_H\mathcal{M}^H \to \mathbf{Vect}_k$ を忘却関手とする．このとき，$\mathrm{Nat}(- \otimes F, F)$ は $H \otimes H^*$ で表現される関手である．また，$\mathrm{Nat}(F, F \otimes -)$ も $H \otimes H^*$ で表現される関手である．

自然同型 $\theta\colon \mathrm{Hom}_k(-, H \otimes H^*) \to \mathrm{Nat}(- \otimes F, F)$ の構成のみを示す．任意の k 線形空間 V に対して，

$\mathrm{Nat}(V \otimes F, F) \cong \mathrm{Hom}_k(V \otimes H, H)$ を構成すればよい．

$\check{}\colon \mathrm{Nat}(V \otimes F, F) \ni \sigma \mapsto \check{\sigma} \in \mathrm{Hom}_k(V \otimes H, H)$ および

$\tilde{}\colon \mathrm{Hom}_k(V \otimes H, H) \ni g \mapsto \tilde{g} \in \mathrm{Nat}(V \otimes F, F)$ を以下のように定める．($M \in {}_H\mathcal{M}^H, v \in V, m \in M, h \in H$ とする．)

$$\tilde{g}_M(v \otimes m) = g(v \otimes m_1) \triangleright m_0$$

$$\hat{\sigma}(v \otimes h) = (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H)(\sigma_{H \otimes H}(v \otimes 1_H \otimes h))$$

ホップ加群の忘却関手に関する表現可能性その 2

$\tilde{g}$ の自然性および，$\check{\tilde{g}} = g$ は単純な計算で示すことができる．
$- \triangleright m \colon H \ni h \mapsto h \triangleright m \in M$ とすると，$- \triangleright m$ は ${}_H\mathcal{M}$ の射より，
$(- \triangleright m) \otimes \mathrm{id}_H \colon H \otimes H \to M \otimes H$ は ${}_H\mathcal{M}^H$ の射である．よって以下の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
V \otimes H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id}_V \otimes (-\triangleright m) \otimes \mathrm{id}_H"] \arrow[d, "\sigma_{H \otimes H}"'] & V \otimes M \otimes H \arrow[d, "\sigma_{M \otimes H}"] \\
H \otimes H \arrow[r, "(-\triangleright m) \otimes \mathrm{id}_H"'] & M \otimes H
\end{tikzcd}$$

ここから，
$\sigma_{M \otimes H}(v \otimes m \otimes h') = ((- \triangleright m) \otimes \mathrm{id}_H)(\sigma_{H \otimes H}(v \otimes 1_H \otimes h'))$ が分かる．

また，$\rho_M\colon M \to M \otimes H$ が ${}_H\mathcal{M}^H$ の射であるので，以下の図式は可換となる．

$$\begin{tikzcd}
V \otimes M \arrow[rr, "\mathrm{id}_V \otimes \rho_M"] \arrow[d, "\sigma_M"'] & & V \otimes M \otimes H \arrow[d, "\sigma_{M\otimes H}"] \\
M \arrow[rr, "\rho_M"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}_M"'] & & M \otimes H \arrow[d, "\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_h"] \\
& & M
\end{tikzcd}$$

これらを組み合わせると，$\tilde{\tilde{\sigma}} = \sigma$ であることが分かる．

$H \otimes H^*$ の代数構造その 1

注意 3.14

$V \in \mathbf{Vect}_k, f = f^1 \otimes f^2 \in \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*), M \in {}_H\mathcal{M}^H, m \in M, v \in V$ とするとき，$\theta_V\colon \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*) \to \mathrm{Nat}(V \otimes F, F)$ および ${\theta_V}^{-1}\colon \mathrm{Nat}(V \otimes F, F) \to \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*)$ を明示的に表示すると以下のようになる．

$$\theta_V(f)_M(v \otimes m) = f^2(v)(m_1)f^1(v) \triangleright m_0$$

$${\theta_V}^{-1}(\sigma)(v) = \sum_i (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H)(\sigma_{H \otimes H}(v \otimes 1_H \otimes \boldsymbol{e}_i)) \otimes \boldsymbol{e}^i$$

$H \otimes H^*$ の代数構造の決定

命題 3.13 において，$H \otimes H^*$ は定理 2.16 より，$\mathbf{Vect}_k$ における代数 (つまり k 上の代数) となる．この代数構造を具体的に書き下してみよう．

$H \otimes H^*$ の代数構造その 2

$V \in \mathbf{Vect}_k, f = f^1 \otimes f^2 \in \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*), M \in {}_H\mathcal{M}^H, m \in M, v \in V, a \otimes \xi, b \otimes \nu \in H \otimes H^*$ とする．

$$\theta_V(f)_M(v \otimes m) = f^2(v)(m_1)f^1(v) \triangleright m_0$$

$$\theta_V{}^{-1}(\sigma)(v) = \sum_i (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H)(\sigma_{H \otimes H}(v \otimes 1_H \otimes \boldsymbol{e}_i)) \otimes \boldsymbol{e}^i$$

$$\varphi_M(a \otimes \xi \otimes m) = \theta_{H \otimes H^*}(\mathrm{id}_{H \otimes H^*})_M(a \otimes \xi \otimes m) = \xi(m_1)a \triangleright m_0$$

$$(\varphi \circ (\mathrm{id} \otimes \varphi))_M(a \otimes \xi \otimes b \otimes \nu \otimes m) = \varphi_M(a \otimes \xi \otimes \nu(m_1)b \triangleright m_0) =$$

$$\mu_{H \otimes H^*}(a \otimes \xi \otimes b \otimes \nu) = \theta_{H \otimes H^* \otimes H \otimes H^*}{}^{-1}(\varphi \circ (\mathrm{id} \otimes \varphi))(a \otimes \xi \otimes b \otimes \nu) =$$

ホップ加群の圏と忘却関手からの代数の構成のまとめ

- 有限次元ホップ代数 H とすると，忘却関手 $F\colon {}_H\mathcal{M}^H \to \mathbf{Vect}_k$ に対して，自然同型 $\theta\colon \mathrm{Hom}_k(-, H \otimes H^*) \to \mathrm{Nat}(- \otimes F, F)$ が構成できる．
- 定理 2.16 より，$A_F = H \otimes H^*$ の代数構造が定まる．
- $H \otimes H^*$ にこの代数構造を定めたものを $H(H)$ と書き，ハイゼンベルグダブルという．$H(H)$ の元を $a\sharp\xi$ の形で表示することにする．
- $H(H)$ の積は $(a\sharp\xi) \cdot (b\sharp\nu) = ab_1\sharp(\xi \leftharpoondown b_2) * \nu$ である．
- 自然同型 $\mathrm{Nat}(F, F \otimes -) \cong \mathrm{Hom}_k(H^* \otimes H, -)$ を用いて，同様の構成により，余代数 $C_F = H^* \otimes H$ を構成できる．
- 実際に ${C_F}^* \cong A_F$ であることを確かめることができる．(詳しい計算はノートを参照のこと)

Yetter-Drinfel'd 加群の圏とドリンフェルトダブル

定義 4.1 (ブレイドモノイダル圏)

$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$\tau\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ を第一成分と第二成分を入れ替える関手，$c\colon - \otimes - \to (- \otimes -) \circ \tau$ を自然同型とする．$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r, c)$ が ブレイドモノイダル圏 (braided monoidal category)であるとは，$\mathcal{C}$ の任意の対象 X, Y, Z, W に対して，以下の図式が可換になることをいう．また c を braiding という．

ブレイドモノイダル圏の定義

(hexagon axiom)

$$
\begin{tikzcd}
& X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "c_{X,Y\otimes Z}"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dr, "a_{Y,Z,X}"] & \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "c_{X,Y}\otimes 1_Z"'] & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\
& (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[ur, "1_Y \otimes c_{X,Z}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "c_{X\otimes Y,Z}"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[dr, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] & \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "a^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,Z}"'] & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\
& X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"'] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[ur, "c_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

ブレイドモノイダル圏の例

例 4.2

$\mathcal{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Vect}_k$ において，$\tau\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ を第一成分と第二成分を入れ替える関手とする．このとき，τ を braiding とすると，$\mathcal{C}$ はブレイドモノイダル圏となる．（特に対称モノイダル圏と呼ばれる構造を持っている．）

上記の例はある意味で自明な braiding を持つブレイドモノイダル圏構造といえる．

モノイダル圏の Drinfel’d center

定義 4.3 (Drinfel’d center)

$\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする．$\mathcal{C}$ の対象 Z と，任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y に対して，以下の条件を満たす自然同型 $\gamma_{-,Z}\colon -\otimes Z \to Z \otimes -$ の組 $(Z, \gamma_{-,Z})$ を $\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$ の対象とする．

$$
\begin{tikzcd}
 & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[dr, "\gamma_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y"] & \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X \otimes \gamma_{Y,Z}"] \arrow[dr, "a^{-1}_{X,Y,Z}"'] & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\
 & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "\gamma_{X \otimes Y, Z}"'] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[ur, "a^{-1}_{Z,X,Y}"'] &
\end{tikzcd}
$$

また，$\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$ の対象 $(Z, \gamma_{-,Z}), (Z', \gamma_{-,Z'})$ に対して，$\mathcal{C}$ の射 $f\colon Z \to Z'$ で，任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して，$(f \otimes \mathrm{id}_X) \circ \gamma_{X,Z} = \gamma_{X,Z'} \circ (\mathrm{id}_X \otimes f)$ を満たすものを $\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$ の射とするとき，$\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$ はブレイドモノイダル圏となる．$\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ のright Drinfel’d centerという．

${}_H\mathcal{M}$ の Drinfel'd center の具体的な構造その 1

有限次元ホップ代数 H に対して，$\mathcal{Z}_r({}_H\mathcal{M})$ の構造を具体的に見てみよう．$(M, \gamma_{-,M}) \in \mathcal{Z}_r({}_H\mathcal{M})$ に対して，$\rho_M(m) = \gamma_{H,M}(1_H \otimes m)$ とする．$X \in {}_H\mathcal{M}, x \in X$ に対して，$\bar{x}\colon H \ni h \mapsto h \triangleright x \in X$ は ${}_H\mathcal{M}$ の射より，$\gamma_{-,M}$ の自然性より以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} H \otimes M \arrow[r, "\bar{x}\otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\gamma_{H,M}"'] & X \otimes M \arrow[d, "\gamma_{X,M}"] \\ M \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id}_M \otimes \bar{x}"'] & M \otimes X \end{tikzcd}$$

よって，$\gamma_{X,M}(x \otimes m) = m_0 \otimes m_1 \triangleright x$ となる．

$h_1 \triangleright m_0 \otimes h_2 \cdot m_1 = h \triangleright (m_0 \otimes m_1) = h \triangleright \gamma_{H,M}(1_H \otimes m) = \gamma_{H,M}(h_1 \otimes h_2 \triangleright m) = (h_2 \triangleright m)_0 \otimes (h_2 \triangleright m)_1 \cdot h_1$

${}_H\mathcal{M}$ の Drinfel'd center の具体的な構造その 2

以下の図式の可換性から (M, ρ_M) が余結合律を満たすことが分かる．

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes (M \otimes H) \arrow[r, "a^{-1}_{H,M,H}"] & (H \otimes M) \otimes H \arrow[dr, "\gamma_{H,M} \otimes \mathrm{id}_H"] & \\
H \otimes (H \otimes M) \arrow[ur, "\mathrm{id}_H \otimes \gamma_{H,M}"] \arrow[dr, "a^{-1}_{H,H,M}"'] & & & (M \otimes H) \otimes H \\
 & (H \otimes H) \otimes M \arrow[r, "\gamma_{H \otimes H, M}"'] & M \otimes (H \otimes H) \arrow[ur, "a^{-1}_{M,H,H}"'] &
\end{tikzcd}$$

簡単な議論により余単位律も示すことができ，(M, ρ_M) は右 H 余加群である．(M, λ_M) は定義より左 H 加群で，$(h_2 \triangleright m)_0 \otimes (h_2 \triangleright m)_1 \cdot h_1 = h_1 \triangleright m_0 \otimes h_2 \cdot m_1$ を満たしている．

Yetter-Drinfel'd 加群の圏

有限次元ホップ代数 H に対して，$\mathcal{Z}_r({}_H\mathcal{M})$ と以下で定義される ${}_H\mathcal{YD}^H$ はブレイドモノイダル圏として同値である．

定義 4.4 (Yetter-Drinfel'd 加群の圏)

H をホップ代数とし，(M, λ_M) を左 H 加群，(M, ρ_M) を右 H 余加群とする．任意の H の元 h と M の元 m に対して以下が成立するとき，(M, λ_M, ρ_M) は Yetter-Drinfel'd 加群 (Yetter-Drinfel'd module)であるという．

$$(h_2 \triangleright m)_0 \otimes (h_2 \triangleright m)_1 \cdot h_1 = h_1 \triangleright m_0 \otimes h_2 \cdot m_1$$

$(M, \lambda_M, \rho_M), (N, \lambda_N, \rho_N)$ を Yetter-Drinfel'd 加群とする．$f \colon M \to N$ が左 H 加群の射でかつ，右 H 余加群の射であるとき，Yetter-Drinfel'd 加群の射であるという．Yetter-Drinfel'd 加群と Yetter-Drinfel'd 加群の射からなる圏を Yetter-Drinfel'd 加群の圏といい，${}_H\mathcal{YD}^H$ と表す．

補題 4.5

H を有限次元ホップ代数とする．

$$- \otimes H \colon {}_H\mathcal{M} \ni (M, \lambda_M) \mapsto (M \otimes H, \lambda_{M \otimes H}, \rho_{M \otimes H}) \in {}_H\mathcal{YD}^H$$

を以下のように定めると，$- \otimes H$ は関手となる．

$$\lambda_{M \otimes H}(h \otimes m \otimes a) = h \triangleright (m \otimes a) = h_2 \triangleright m \otimes h_3 \cdot a \cdot S^{-1}(h_1)$$

$$\rho_{M \otimes H}(m \otimes a) = (m \otimes a)_0 \otimes (m \otimes a)_1 = m \otimes a_1 \otimes a_2$$

補題 4.6

H を有限次元ホップ代数とし，(M, λ_M, ρ_M) を *Yetter-Drinfel'd* 加群とする．このとき $\rho_M\colon M \to M \otimes H$ は ${}_H\mathcal{YD}^H$ の射である．ただし，$M \otimes H$ の *Yetter-Drinfel'd* 加群構造は補題 *4.5* で定義されたものとする．

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho_M} & M \otimes H \\ {\scriptstyle \rho_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{M\otimes H}} \\ M \otimes H & \xrightarrow[\rho_M \otimes \mathrm{id}_H]{} & M \otimes H \otimes H \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H \otimes M & \xrightarrow{\mathrm{id}_H \otimes \rho_M} & H \otimes M \otimes H \\ {\scriptstyle \lambda_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{M\otimes H}} \\ M & \xrightarrow[\rho_M]{} & M \otimes H \end{array}$$

命題 4.7

H を有限次元ホップ代数とし，$F\colon {}_H\mathcal{YD}^H \to \mathbf{Vect}_k$ を忘却関手とする．このとき，$\mathrm{Nat}(- \otimes F, F)$ は $H \otimes H^*$ で表現される関手である．また，$\mathrm{Nat}(F, F \otimes -)$ も $H \otimes H^*$ で表現される関手である．

証明はホップ加群の場合と全く同様である．$V \in \mathbf{Vect}_k, f = f^1 \otimes f^2 \in \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*), M \in {}_H\mathcal{M}^H, m \in M, v \in V$ とするとき，$\theta_V\colon \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*) \to \mathrm{Nat}(V \otimes F, F)$ および ${\theta_V}^{-1}\colon \mathrm{Nat}(V \otimes F, F) \to \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*)$ を明示的に表示すると以下のようになる．

$$\theta_V(f)_M(v \otimes m) = f^2(v)(m_1)f^1(v) \triangleright m_0$$

$${\theta_V}^{-1}(\sigma)(v) = \sum_i (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H)(\sigma_{H\otimes H}(v \otimes 1_H \otimes \boldsymbol{e}_i)) \otimes \boldsymbol{e}^i$$

$H \otimes H^*$ の代数構造その 1

$H \otimes H^*$ の代数構造の決定

命題 4.7 において，$H \otimes H^*$ は定理 2.16 より，$\mathbf{Vect}_k$ における代数 (つまり k 上の代数) となる．この代数構造を具体的に書き下してみよう．

注意 4.8

ここでは代数構造のみに着目しているが，忘却関手 $F\colon {}_H\mathcal{YD}^H \to \mathbf{Vect}_k$ はリジッドブレイドモノイダル圏からリジッドブレイドモノイダル圏へのリジッドモノイダル関手なので，$H \otimes H^*$ はただの代数構造だけでなく，準三角ホップ代数構造を持つ．

$H \otimes H^*$ の代数構造その 2

$V \in \mathbf{Vect}_k, f = f^1 \otimes f^2 \in \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^*), M \in {}_H\mathcal{M}^H, m \in M, v \in V, a \otimes \xi, b \otimes \nu \in H \otimes H^*$ とする.

$$\theta_V(f)_M(v \otimes m) = f^2(v)(m_1) f^1(v) \triangleright m_0$$

$${\theta_V}^{-1}(\sigma)(v) = \sum_i (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H)(\sigma_{H \otimes H}(v \otimes 1_H \otimes \boldsymbol{e}_i)) \otimes \boldsymbol{e}^i$$

$$\varphi_M(a \otimes \xi \otimes m) = \theta_{H \otimes H^*}(\mathrm{id}_{H \otimes H^*})_M(a \otimes \xi \otimes m) = \xi(m_1) a \triangleright m_0$$

$$(\varphi \circ (\mathrm{id} \otimes \varphi))_M(a \otimes \xi \otimes b \otimes \nu \otimes m) = \varphi_M(a \otimes \xi \otimes \nu(m_1) b \triangleright m_0) =$$

$$\mu_{H \otimes H^*}(a \otimes \xi \otimes b \otimes \nu) = {\theta_{H \otimes H^* \otimes H \otimes H^*}}^{-1}(\varphi \circ (\mathrm{id} \otimes \varphi))(a \otimes \xi \otimes b \otimes \nu) =$$

Yetter-Drinfel'd 加群の圏と忘却関手からの代数の構成のまとめ

- 有限次元ホップ代数 H とすると，忘却関手 $F\colon {}_H\mathcal{YD}^H \to \mathbf{Vect}_k$ に対して，自然同型 $\theta\colon \mathrm{Hom}_k(-, H\otimes H^*) \to \mathrm{Nat}(-\otimes F, F)$ が構成できる．
- 定理 2.16 より，$A_F = H\otimes H^*$ の代数構造が定まる．
- $H\otimes H^*$ にこの代数構造を定めたものを $D(H^*)$ と書き，ドリンフェルトダブルという．$D(H^*)$ の元を $a \bowtie \xi$ の形で表示することにする．
- $D(H^*)$ の積は $(a\bowtie\xi)\cdot(b\bowtie\nu) = ab_2 \bowtie (S^{-1}(b_1) \rightharpoonup \xi \leftharpoonup b_3) * \nu$ である．
- 自然同型 $\mathrm{Nat}(F, F\otimes -) \cong \mathrm{Hom}_k(H^*\otimes H, -)$ を用いて，同様の構成により，余代数 $C_F = H^*\otimes H$ を構成できる．
- 実際に $C_F{}^* \cong A_F$ であることを確かめることができる．(詳しい計算はノートを参照のこと)

${}_H\mathcal{M}^H$ の左 ${}_H\mathcal{YD}^H$-module category 構造と $H(H)$ の右 $\mathbf{D}(H^*)$-comodule algebra 構造について

加群圏の定義その 1

定義 5.1 (右加群圏)

$(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とし，$\mathcal{M}$ を圏とする．関手 $\otimes_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と，自然同型 $m : (- \otimes_{\mathcal{M}} -) \otimes_{\mathcal{M}} - \to - \otimes_{\mathcal{M}} (- \otimes_{\mathcal{C}} -), \check{r} : 1_{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{M}} I \to 1_{\mathcal{M}}$ に対して，$(\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{M}}, m, \check{r})$ が以下の 2 条件を満たすとき，$\mathcal{C}$ 上の右加群圏 (right $\mathcal{C}$-module category) であるという．

(pentagon axiom) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & ((M \otimes_{\mathcal{M}} X) \otimes_{\mathcal{M}} Y) \otimes_{\mathcal{M}} Z \arrow[dl, "m_{M,X,Y} \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{id}_Z"'] \arrow[dr, "m_{M \otimes_{\mathcal{M}} X, Y, Z}"] & \\
(M \otimes_{\mathcal{M}} (X \otimes_{\mathcal{C}} Y)) \otimes_{\mathcal{M}} Z \arrow[d, "m_{M, X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z}"'] & & (M \otimes_{\mathcal{C}} X) \otimes_{\mathcal{M}} (Y \otimes_{\mathcal{M}} Z) \arrow[d, "m_{M,X,Y \otimes_{\mathcal{C}} Z}"] \\
M \otimes_{\mathcal{M}} ((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[rr, "\mathrm{id}_M \otimes a_{X,Y,Z}"] & & M \otimes_{\mathcal{M}} (X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{tikzcd}$$

加群圏の定義その 2

右加群圏の定義の続き

(triangle axiom) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して以下の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
(M \otimes_{\mathcal{M}} I) \otimes_{\mathcal{M}} X \arrow[rr, "m_{M,I,X}"] \arrow[dr, "r'_M \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{id}_X"'] & & M \otimes_{\mathcal{M}} (I \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[dl, "\mathrm{id}_M \otimes_{\mathcal{M}} l_X"] \\
& M \otimes_{\mathcal{M}} X &
\end{tikzcd}
$$

module algebra と comodule algebra の定義

定義 5.2 (module algebra と comodule algebra)

H をホップ代数とする．${}_H\mathcal{M}$ における代数を
left H-module algebraという．$\mathcal{M}^H$ における代数を
right H-comodule algebraという．

上記の条件をより具体的に書き下すと以下のようになる．

- $(A, \lambda_A, \mu_A, \eta_A)$ が left H-module algebra であるとは，(A, λ_A) が左 H 加群で，(A, μ_A, η_A) が k 代数でかつ，μ_A, η_A が左 H 加群の射であることである．
- $(A, \rho_A, \mu_A, \eta_A)$ が right H-comodule algebra であるとは，(A, ρ_A) が右 H 余加群で，(A, μ_A, η_A) が k 代数でかつ，μ_A, η_A が右 H 余加群の射であることである．

${}_H\mathcal{M}^H$ の右 ${}_H\mathcal{YD}^H$ 加群圏構造

命題 5.3

H をホップ代数とし，関手 $\triangleleft\colon {}_H\mathcal{M}^H \times {}_H\mathcal{YD}^H \to {}_H\mathcal{M}^H$ を $(M, N) \in {}_H\mathcal{M}^H \times {}_H\mathcal{YD}^H, h \in H, m \in M, n \in N$ に対し，以下で定義する．

$$M \triangleleft N := M \otimes N$$

$$\lambda_{M \triangleleft N}(h \otimes m \otimes n) = h_1 \triangleleft m \otimes h_2 \triangleleft n$$

$$\rho_{M \triangleleft N}(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes n_1 \cdot m_1$$

このとき，${}_H\mathcal{M}^H$ は $\triangleleft$ により，右 ${}_H\mathcal{YD}^H$ 加群圏の構造を持つ．

命題 5.4

命題 *5.3* の状況において，

$F\colon {}_H\mathcal{M}^H \to \mathbf{Vect}_k, G\colon {}_H\mathcal{YD}^H \to \mathbf{Vect}_k$ を忘却関手とすると，$F \otimes G\colon {}_H\mathcal{M}^H \times {}_H\mathcal{YD}^H \to \mathbf{Vect}_k$ が定まり，以下の図式は可換である．また $\mathrm{Nat}(- \otimes F \otimes G, F \otimes G)$ は $H \otimes H^* \otimes H \otimes H^*$ により表現可能である．

$$\begin{tikzcd}
{}_H\mathcal{M}^H \times {}_H\mathcal{YD}^H \arrow[rr, "\triangleleft"] \arrow[dr, "F\otimes G"'] & & {}_H\mathcal{M}^H \arrow[dl, "F"] \\
& \mathbf{Vect}_k &
\end{tikzcd}$$

$H(H)$ の $D(H^*)$-comodule algebra 構造の決定

命題 5.4 において，F からは $H(H)$，$F \otimes G$ からは $H(H) \otimes D(H^*)$ が構成される．図式の可換性から，$\Delta_{H(H)} \colon H(H) \to H(H) \otimes D(H^*)$ が構成でき，$H(H)$ は $D(H^*)$-comodule algebra となる．その構造を明示的に表示してみよう．

$F \otimes G$ に関する表現可能性

$V \in \mathbf{Vect}_k, f = f^1 \otimes f^2 \otimes f^3 \otimes f^4 \in \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^* \otimes H \otimes H^*), \sigma \in \mathrm{Nat}(V \otimes F \otimes G, F \otimes G), M \triangleleft N \in {}_H\mathcal{M}^H \times {}_H\mathcal{YD}^H, m \otimes n \in M \triangleleft N, v \in V$

とするとき，

$$\theta_V \colon \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^* \otimes H \otimes H^*) \to \mathrm{Nat}(V \otimes F \otimes G, F \otimes G)$$

および

$$\theta_V{}^{-1} \colon \mathrm{Nat}(V \otimes F \otimes G, F \otimes G) \to \mathrm{Hom}_k(V, H \otimes H^* \otimes H \otimes H^*)$$

を明示的に表示すると以下のようになる．

$$\theta_V(f)_{M \triangleleft N}(v \otimes m \otimes n) = f^2(v)(m_1) f^4(v)(n_1) f^1(v) \triangleright m_0 \otimes f^3(v) \triangleright n_0$$

$$\theta_V{}^{-1}(\sigma)(v) = (\mathrm{id}_H \otimes \tau_{H^*, H} \otimes \mathrm{id}_{H^*}) \textstyle\sum_{i,j} (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H)(\sigma_{(H \otimes H) \triangleleft (H \otimes H)}(v \otimes 1_H \otimes \boldsymbol{e}_i \otimes 1_H \otimes \boldsymbol{e}_j)) \otimes \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j$$

$H(H)$ の $D(H^*)$-comodule algebra 構造の決定

χ を $\triangleleft$ の引き戻しから定まる $\mathrm{End}(F)$ から $\mathrm{End}(F \otimes G)$ への写像とする．自然同型 $\theta' \colon \mathrm{Hom}_k(-, H \otimes H^*) \to \mathrm{Nat}(- \otimes F, F)$ と自然同型 $\theta \colon \mathrm{Hom}_k(-, H \otimes H^* \otimes H \otimes H^*) \to \mathrm{Nat}(- \otimes F \otimes G, F \otimes G)$ を用いて以下の写像を定義する．

$$H(H) \xrightarrow{\theta'_k} \mathrm{End}(F) \xrightarrow{\chi} \mathrm{End}(F \otimes G) \xrightarrow{{\theta_k}^{-1}} H(H) \otimes D(H^*)$$

この合成写像を $\rho_{H(H)} \colon H(H) \to H(H) \otimes D(H^*)$ と書くと，
$a \sharp \xi \in H(H)$ に対して，

$\rho_{H(H)}(a \sharp \xi) = \theta_k^{-1}(\chi(\theta'_k(a \sharp \xi))) =$
$(\mathrm{id}_H \otimes \tau_{H^*,H} \otimes \mathrm{id}_{H^*})(\sum_{i,j}(\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H \otimes$
$\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H)(\chi(\theta_k(a \sharp \xi))_{(H \otimes H) \triangleleft (H \otimes H)}(1_H \otimes \boldsymbol{e}_i \otimes 1_H \otimes \boldsymbol{e}_j)) \otimes \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j) =$

${}_H\mathcal{M}^H \times {}_H\mathcal{YD}^H$ と忘却関手からの comodule algebra の構成まとめ

- 有限次元ホップ代数 H とすると，
  $F \otimes G \colon {}_H\mathcal{M}^H \times {}_H\mathcal{YD}^H \to \mathbf{Vect}_k$ に対して，自然同型
  $\theta\colon \mathrm{Hom}_k(-, H \otimes H^* \otimes H \otimes H^*) \to \mathrm{Nat}(- \otimes F \otimes G, F \otimes G)$
  が構成できる．
- 定理 2.16 より，$A_{F\otimes G} = H \otimes H^* \otimes H \otimes H^*$ の代数構造が定まる．その代数構造は $H(H) \otimes D(H^*)$ である．
- $H(H)$ の右 $D(H^*)$ 余加群構造は
  $\rho_{H(H)}(a\sharp\xi) = a_1\sharp\xi_2 \otimes a_2 \bowtie \xi_1$ である．
- 自然同型
  $\mathrm{Nat}(F \otimes G, F \otimes G \otimes -) \cong \mathrm{Hom}_k(H^* \otimes H \otimes H^* \otimes H, -)$ を用いて，同様の構成により，余代数
  $C_{F\otimes G} = H^* \otimes H \otimes H^* \otimes H$ を構成できる．
- 実際に ${C_{F\otimes G}}^* \cong A_{F\otimes G}$ であることを確かめることができる．

- D. Bulacu and B. Torrecillas, *Quasi-quantum groups obtained from the Tannaka-Krein reconstruction theorem*, Contemp. Math, **751**, 61-97, (2020).
- P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik, *Tensor categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 205, American Mathematical Society, (2015).
- R. Laugwitz, *Braided Drinfeld and Heisenberg doubles*, Journal of Pure and Applied Algebra, **219**(10), 4541-4596, (2015).
- J. H. Lu, *On the Drinfeld double and the Heisenberg double of a Hopf algebra*, Duke Math, **74**(3), 763-776, (1994).
- A. Lyubinin, Tannaka Duality, *Coclosed Categories and Reconstruction for Nonarchimedean Bialgebras*, Appl Categor Struct, **29**, 547 571, (2021).

ご清聴ありがとうございました！